Алгебра

Методические рекомендации

9 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание, доработанное

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
А45

16+

Авторы: С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова,
С. С. Минаева, Л. О. Рослова

А45 **Алгебра.** Методические рекомендации. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова и др.]. — 2-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 2017. — 214 с. : ил. — ISBN 978-5-09-043097-5.

Пособие предназначено учителям, ведущим преподавание по УМК «Алгебра. 9 класс» Г. В. Дорофеева и др., который включает также учебник, дидактические материалы, рабочую тетрадь, тематические тесты, контрольные работы, устные упражнения Пособие содержит методические комментарии к каждой главе учебника, рекомендации к решению упражнений, примерное распределение материала всех книг комплекта по изучаемым темам.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-043099-9

Введение

Цель данного пособия — помочь учителю в овладении идеологией и основными методическими идеями курса алгебры для 7—9 классов, реализуемого в линии учебников Г. В. Дорофеева и др., облегчить ежедневную подготовку к урокам при работе в 9 классе. Пособие состоит из следующих разделов.

«Общая характеристика курса алгебры 7—9 классов» — в этом разделе излагается концепция курса, описывается состав учебно-методического комплекта и функции каждого из входящих в него пособий, даётся характеристика содержания и методических особенностей комплекта, приводится перечень планируемых результатов обучения алгебре в 7—9 классах. Завершается этот раздел описанием содержания учебника для 9 класса.

Раздел «Примерное поурочное планирование учебного материала» послужит учителю основой для организации и распределения учебного времени в 9 классе.

Основной раздел пособия — это раздел «Рекомендации по организации учебного процесса», структура которого соответствует структуре учебника для 9 класса. В каждой главе учебника в этом разделе содержатся:

- примерное поурочное планирование учебного материала;
- основные цели, характеризующие центральные установки по изучению материала;
- обзор главы, в котором кратко описывается её содержание;
- описание основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий);
- комментарий к использованию электронных изданий.

По каждому пункту учебника предлагается:

- методический комментарий, содержащий советы и рекомендации по изложению материала, в том числе относящиеся к реализации дифференцированного подхода в обучении;
- комментарий к упражнениям, в котором содержатся рекомендации по работе с конкретными задачами.

Общая характеристика курса алгебры 7—9 классов

<u>Краткая концепция курса</u>

К общим идеям, составляющим основу концепции курса, относятся:

- интеллектуальное развитие учащихся средствами математики;
- акцент на общекультурную составляющую школьного курса математики при изложении содержания курса;
- формирование умения применять полученные знания в реальных ситуациях;
- внимание к мотивационной стороне обучения;
- развитие интереса к математике;
- создание условий для дифференцированного обучения.

Центральная идея — *интеллектуальное развитие учащихся средствами математики* — полностью коррелирует с идеологией образовательных стандартов (ФГОС), в которых ставится задача эффективного использования потенциала школьных предметов для развития личностных качеств обучаемых.

Школьники имеют возможность овладевать исследовательскими и логическими действиями, предполагающими умение видеть проблему, ставить вопросы, наблюдать и проводить эксперименты, сравнивать и классифицировать, делать обобщения, формулировать выводы и умозаключения, проводить доказательства, приводить примеры и контрпримеры.

Эффективности интеллектуального развития способствует понимание и осознание самого *процесса мыслительной деятельности* (механизмов рассуждений, умозаключений). Поэтому в новых изданиях учебников инициируется рефлексия общих способов действий, акцентируется внимание на собственно процессе решения проблемы.

Развитие мышления тесно связано с развитием речи, со способностью говорить, выражать свои мысли. Свидетельством чёткого и организованного мышления является грамотный математический язык. Обучение математическому языку как специфическому средству коммуникации в его сопоставлении с реальным языком авторы считают важнейшей задачей обучения, для решения которой используются адекватные методические приёмы.

Отличительной особенностью учебников является внимание к развитию и формированию гибкости мышления. Этому, в частности, способствует включение в теоретический и задачный материал фрагментов, иллюстрирующих внутренние связи алгебры и геометрии. Понимание взаимосвязи этих предметов способствует формированию способности к варьированию способов действия, к перестройке уже имеющихся знаний, к решению задач, опирающихся на неочевидные связи и отношения между понятиями и фактами.

Состав учебно-методического комплекта

Центральное пособие комплекта — *учебник*. Он предъявляет содержание и задает идеологию курса, определяет характер учебной деятельности учеников:

Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2013—2017.

Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2014—2017.

Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2014—2017.

Для эффективной организации учебного процесса целесообразно использовать следующие пособия, дополняющие данные учебники и образующие с ними учебно-методический комплект:

- Минаева С. С., Рослова Л. О. Алгебра. Рабочая тетрадь. 7, 8, 9 классы. — М.: Просвещение, 2009—2016.
- Евстафьева Л. П., Карп А. П. Алгебра. Дидактические материалы. 7, 8, 9 классы. — М.: Просвещение, 2006—2016.
- Алгебра. Тематические тесты. 7, 8, 9 классы / [Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова, С. Б. Суворова]. — М.: Просвещение, 2009—2016.
- Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О., Суворова С. Б. Алгебра. Контрольные работы. 7, 8, 9 классы. — М.: Просвещение, 2016.
- Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2015—2017. (размещено на сайте www.prosv.ru).
- Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2015—2017. (размещено на сайте www.prosv.ru).
- Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс / [С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — М.: Просвещение, 2015—2017. (размещено на сайте www.prosv.ru).

Рабочая тетрадь полезна прежде всего на начальном этапе формирования знаний в основном за счёт способа предъявления заданий (на печатной основе).

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся. Они содержат как обучающие, так и проверочные работы, в том числе работы в тестовой форме, снабжённые «ключом» — перечнем верных ответов, а также дополнительный материал для сильных учащихся.

Тематические тесты предназначены для организации текущего оперативного контроля достижения учащимися базовых требований по изучаемой теме, т. е. проверки знания и понимания понятий и их свойств, владения основными алгоритмами, умения применять знания в несложных ситуациях.

В сборнике *контрольных работ* содержатся тематические контрольные работы в четырёх вариантах, итоговые (полугодовые и годовые) контрольные работы. Тематические контрольные работы снабжены критериями оценивания, перечнем проверяемых умений, таблицами для анализа результатов.

Методические рекомендации — пособие для учителей, имеющие своей целью помочь им в овладении идеологией основными методическими идеями курса, облегчить подготовку к урокам.

Характеристика содержания курса алгебры 7—9 классов

В учебниках представлены следующие блоки раздела «Содержание курса» Примерных программ основного общего образования по математике[1]: *числа, тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции, статистика и теория вероятностей, элементы теории множеств и логика*. Кроме того, согласно программам при изложении основного содержания в учебниках там, где это возможно, органично присутствует историко-культурологический фон, что способствует формированию у школьников представлений о роли математики в развитии цивилизации.

Числа. В отличие от традиционного подхода изучение арифметического материала не ограничивается рамками 5—6 классов. Практика показывает, что базовые вычислительные навыки учащихся формируются недостаточно, поэтому учебник для 7 класса начинается с арифметического блока. Здесь ещё раз, на новом уровне, уделяется внимание взаимосвязи обыкновенных и десятичных дробей, обучению различным приёмам сравнения дробей, совершенствованию навыков действий с рациональными числами, приёмам решения задач на проценты. Особого внимания заслуживает рассмотрение зависимостей между величинами, работа с формулами, с размерностями. В курс 7 класса включено изучение прямой и обратной пропорциональностей — вопроса, имеющего большое общеобразовательное значение и межпредметный характер.

В 8 и 9 классах числовая линия получает дальнейшее развитие как в теоретическом, так и в практическом отношении. Сложная в идейном отношении тема о действительных числах распределена между материалом 8 и 9 классов. В 8 классе в теме «Квадратные корни» учащиеся узнают о существовании чисел, не являющихся рациональными, об историческом значении этого факта для развития математики. В 9 классе знания учащихся о числах обобщаются и систематизируются: обсуждаются этапы развития представлений о числе, вводится понятие действительного числа, рассматриваются соотношения между различными числовыми множествами. На протяжении всего курса через систему упражнений поддерживаются и развиваются вычислительные навыки. При этом значительная роль отводится выполнению заданий с помощью калькулятора, что позволяет проводить математические исследования на основе числовых

---

[1] Примерная основная общеобразовательная программа основного общего образования (далее: Примерная программа).

экспериментов, решать задачи с реальными данными, выполнять сложные расчеты, доводя результат до числа.

Тождественные преобразования. Введение вопросов, связанных с буквенным исчислением, базируется на знаниях, полученных учащимися в 5—6 классах, где они познакомились с понятием буквенного выражения, приобрели опыт составления буквенных выражений, вычисления их значений. Появление буквенных равенств в 7 классе мотивируется опытом работы с числами, осознанием и обобщением приёмов вычислений. Свойства арифметических действий становятся для учащихся законами преобразований буквенных выражений, при этом список постулируемых законов определяется не принципами независимости и полноты, а методической целесообразностью.

В 7 классе центральным вопросом является изучение действий с многочленами, разложения многочленов на множители, в 8 классе — изучение действий с алгебраическими дробями. В 9 классе изучение рациональных выражений получает логическое завершение и поднимается на более высокий теоретический уровень. Здесь вводятся понятия целого, дробного и рационального выражения, области определения рационального выражения. С целью противопоставления приводятся примеры иррациональных выражений. Вводится также понятие тождества. При этом представлены и функциональный, и алгебраический подходы к этому понятию. Рассматриваются разные способы доказательства тождеств.

Уравнения и неравенства. Развитие формально-оперативных навыков делает естественным переход к алгебраическому методу решения задач, что одновременно служит мотивом для обучения способам решения уравнений. В 7 классе основное внимание уделяется линейным уравнениям. В 8 классе объектом изучения становятся квадратные уравнения. В связи с введением понятий квадратного и кубического корня, рассматриваются уравнения $x^n = a$ для случаев $n = 2$ и $n = 3$. В 9 классе линия уравнений получает развитие и в теоретическом, и в практическом отношении. Систематизируются и обобщаются сведения о целых уравнениях, затрагивается исторический аспект вопроса о формулах корней целых уравнений, внимание уделяется уже встречавшимся в 7 и 8 классах таким приёмам решения целых уравнений, как разложение на множители и замена переменной. Рассматриваются дробные уравнения; учащиеся знакомятся с общим приёмом решения дробных уравнений, а также с приёмами решения некоторых частных видов таких уравнений.

Начало изучения вопроса об уравнениях с двумя переменными и их системах относится к 8 классу. Особенностью изложения этого вопроса является то, что алгебраический аспект темы предваряется формированием широкого круга графических представлений. Вводится понятие уравнения с двумя переменными и его графика. Основное внимание здесь уделяется линейному уравнению и его графической интерпретации, рассматривается условие параллельности прямых. В учебнике представлены и графики некоторых нелинейных уравнений, в частности, окружность — график уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$).

Алгебраическая часть темы в основном посвящена решению и исследованию систем линейных уравнений.

В силу того что к этому времени учащиеся уже умеют решать квадратные уравнения, в учебнике рассматриваются и примеры решения простейших систем, содержащих одно уравнение второй степени (это первый проход в решении таких систем).

В 9 классе решение систем уравнений, в которых одно уравнение первой степени, а другое второй, занимают центральное место и являются основной учебной целью данной темы. Кроме того, в систему упражнений включены разнообразные примеры нелинейных систем. При этом ставятся две дидактические цели: включение в учебную деятельность школьников всего арсенала приёмов решения уравнений; развитие умения анализировать предложенную систему и найти целесообразный способ её решения. Геометрическая составляющая здесь представлена знакомством с приёмами графического решения систем уравнений с двумя переменными и уравнения с одной переменной.

Особое место в линии уравнений занимает решение текстовых задач. Начиная с 7 класса основным становится алгебраический способ их решения, владение которым развивается по мере развития линии уравнений. Задачи распределены по всей линии, связанной с изучением уравнений и их систем. При этом в учебнике представлен весьма широкий круг задач, в том числе все виды задач, предусмотренные программой.

Неравенства изучаются в курсе 9 класса. Первоначальное изложение вопроса о свойствах неравенств базируется на геометрической трактовке отношений «больше», «меньше», после чего учащиеся переходят к решению линейных неравенств и их систем. Сформированный аппарат применяется для решения различных математических задач (например, исследования функций, решения сюжетных задач), что вносит свой вклад в установление внутрипредметных связей.

Даётся алгебраическая трактовка отношений «больше» и «меньше», рассматриваются различные способы доказательства неравенств. В связи с изучением квадратичной функции рассматривается алгоритм решения квадратных неравенств, учащиеся знакомятся также с методом интервалов.

Функции. В 7 классе продолжается начатое в 6 классе формирование умения работать с координатной плоскостью. Учащиеся строят прямые, заданные соотношениями $x = a$ и $y = b$, изображают на координатной плоскости различные области, заданные алгебраически (полосы, прямоугольники, полуплоскости и др.), решают обратную задачу — переходят от геометрического образа к его алгебраическому описанию.

После этого рассматриваются графики некоторых простейших зависимостей: $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$. Они используются для построения графиков различных кусочно-заданных зависимостей. Существенное место отводится анализу и интерпретации графиков реальных зависимостей.

Введение понятия функции, достаточно трудного для учащихся, а также изучение свойств функций относятся к материалу 8 класса. Учащиеся опираются на полученные ранее знания о зависимостях между величинами, а также на имеющиеся к этому времени достаточно обширные графические представления. Изложение всего материала базируется на геометрических образах. Учащиеся получают представление об общих свойствах функций, таких как возрастание, убывание и др. Методическая цель состоит в том, чтобы сформировать понимание соответствующих терминов в контексте постановки различных задач, а также связи алгебраического, функционального и графического языков.

В 8 классе рассматриваются функции $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ и их свойства, в 9 классе — квадратичная функция. В ходе изучения квадратичной функции формируются некоторые общие представления о преобразованиях графиков. При этом в системе упражнений предусмотрен их перенос на другие ситуации.

Большое место при изучении конкретных функций занимают практические работы, вопросы и задачи прикладного и практического характера, анализ и интерпретация графиков реальных зависимостей.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Тема изучается в 9 классе. Рассмотрению прогрессий предшествует формирование минимально необходимых представлений о числовых последовательностях: вводятся соответствующие термины и символы, рассматриваются способы задания последовательностей, различные примеры последовательностей. В учебнике рассматриваются интересные исторические факты и некоторые классические задачи, что позволяет расширить математический кругозор учащихся. Заметим, что формальное определение числовой последовательности как функции натурального аргумента здесь не предусматривается; на этом этапе оно не является дидактически значимым и не отвечает возрастным возможностям учащихся.

При изучении арифметической и геометрической прогрессий широко привлекаются примеры из окружающего мира. Завершается тема решением задач на простые и сложные проценты, что позволяет ещё раз продемонстрировать применение математики в жизни.

Элементы комбинаторики, вероятности и статистики. Изложение вероятностно-статистической линии начато в 5—6 классах. Учащиеся решают комбинаторные задачи доступным им способом перебора всех возможных вариантов, получают некоторые представления о сборе и анализе информации, работают с таблицами и диаграммами. В 7—8 классах вводятся некоторые статистические характеристики ряда распределений: среднее арифметическое, мода, медиана, размах. В этих классах формируется представление о вероятности случайного события, при этом исходным является статистический подход к понятию вероятности — через эксперимент со случайными исходами. В дальнейшем вводится классическое определение вероятности.

При решении комбинаторных задач усиливается роль логических рассуждений, базу для которых составляет опыт, приобретённый в процессе многократного использования метода полного перебора. Разъясняется комбинаторное правило умножения и на его основе выводится простейшая комбинаторная формула — формула для подсчёта числа перестановок.

В курсе 9 класса представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии. В ней рассматриваются доступные учащимся примеры статистических исследований, в которых используются полученные ранее знания о способах представления данных и статистических характеристиках. В ходе описания исследований расширяется словарь статистических терминов. Включение данного материала направлено прежде всего на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые, например, в средствах массовой информации. Это предполагает не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первое знакомство с понятийным аппаратом этой необходимой каждому человеку области знаний.

При изучении этого материала привлекаются знания из других разделов курса, в частности, вычисляются отношения, проценты, сравниваются дроби и т. д. При решении задач применяется калькулятор, что позволяет активно работать с реальными, практическими данными.

Также в качестве приложения представлены темы, предполагаемые в перспективе для изучения в основной школе, в том числе: Независимые события. Случайные величины. Испытания Бернулли. Закон больших чисел. Знакомство с этими материалами поможет учителю углубить и расширить свои знания по этой новой для российской школы линии, выбрать то, что можно предложить для работы на кружках, занятиях по предпрофильной подготовке.

Элементы теории множеств и логика. Сквозная линия «Множества и логика» получила свое начало уже в предыдущем звене. Предусмотренные программой теоретико-множественные понятия были введены в 6 классе. В 7—9 классах теоретико-множественный язык и символика обогащаются и активно используются во всех разделах курса (алгебраические выражения, функции, уравнения, неравенства, элементы теории вероятностей и статистики). В этом звене уделяется внимание совершенствованию логической культуры и языка, основы которых были заложены на предыдущем этапе. Формулируются определения, теоремы, проводятся доказательства, активно используются логические связки «если …, то …», «в том и только том случае», «или», «и». Учащиеся учатся распознавать верные и неверные утверждения, приводить примеры, иллюстрирующие те или иные свойства, работают с контрпримерами.

В методическое пособие для 9 класса включено специальное приложение «Язык и логика», в котором раскрывается логическое содержание таких понятий, как высказывание и предложение с переменными, суть логических связок «и», «или», «не», равносильность и следование. Учитель может использовать этот материал для индивидуальной работы с сильными учащимися, на внеклассных занятиях, а также в зависимости от уровня подготовки класса и на общих уроках (выборочно или целиком).

Методические особенности и методический аппарат учебников

К *методическим особенностям* учебников относятся:

- мотивированное и доступное изложение теоретических сведений, широкое использование наглядности, опора на здравый смысл и интуицию;
- структурирование содержания курса по спирали, что позволяет возвращаться к изученному ранее материалу на новом уровне, включать знания в новые связи, формировать их в системе;
- ориентация системы упражнений на осознанное усвоение школьниками универсальных учебных действий;

- обеспечение широких возможностей для дифференциации и индивидуализации обучения;
- привлечение современных сюжетов, близких жизненному опыту учащихся, в теоретическом и задачном материале.

Всё содержание учебников разбито на главы, каждая глава открывается небольшой преамбулой, которая вводит учащегося в круг рассматриваемых проблем, создаёт определённую мотивацию. Главы делятся на пункты, каждый из которых включает объяснительный текст и упражнения. Объяснительный текст пункта разбивается на законченные смысловые фрагменты, что позволяет, читая его последовательно, делать целесообразные паузы и осмысливая прочитанное. Завершается объяснительный текст вопросами и заданиями; их задача — организовать работу учащегося с учебным текстом, проверить, правильно ли понято прочитанное, акцентировать внимание на главном. Основные упражнения к пункту разбиты на группы **А** (базовый уровень) и **Б** (более высокие уровни); диапазон сложности заданий широк и достаточен для работы с учащимися, имеющими разные уровни подготовки. К некоторым упражнениям даются советы, подсказки, указания, образцы решений, что помогает быстрому включению ученика в работу.

Ряд заданий в учебниках промаркированы специальными «указателями», которые в явном виде предъявляют учащимся некоторые важнейшие целевые установки. Такой методический приём делает учебную деятельность школьника осознанной и целенаправленной, позволяет ему стать активным участником учебного процесса как в плане освоения ууд, так и с точки зрения приобретения качеств мышления, имманентных (присущих) математической деятельности.

Изучение математики, как никакой другой школьной дисциплины, способствует развитию познавательной сферы человека. И поэтому естественно, что значительное число заданий снабжено указателями, ориентирующими на освоение ууд познавательной группы. Это такие рубрики (указатели), как «Анализируем», исследуем, рассуждаем, доказываем, ищем закономерность, работаем с символами. Значителен вклад предмета математика и в освоение регулятивных ууд. Этому способствуют задания, промаркированные следующим образом: ищем способ решения, действуем по алгоритму, верно или неверно. Для учебника в целом характерен прикладной аспект, который, с одной стороны, предусматривает внутриматематическое приложение сформированного аппарата, а с другой — демонстрацию возможности применения математики в реальной жизни. С этой целью в системе упражнений выделены рубрики применяем алгебру и практическая ситуация.

Каждая глава завершается тремя постоянными рубриками:

- «*Узнайте больше*». Эта рубрика в целом включает большой объём материала, тесно примыкающего к изучаемым темам и позволяющего углубить знания учащихся, познакомить их с новыми математическими идеями, с новыми видами задач.
- «*Дополнительные задания*». Эта рубрика расширяет круг задач в каждой главе и предназначается для организации индивидуальной и дифференцированной работы учащихся.

- «*Чему вы научились*». Эта рубрика позволяет учащемуся проверить, насколько он овладел обязательными знаниями и умениями, и оценить зону своего актуального развития.

С целью воспитания культуры работы с книгой, обучения поиску необходимой информации в конце учебника даётся предметный указатель.

Компьютерное обеспечение

Компьютерная поддержка курса математики создаёт принципиально новые дополнительные возможности для организации усвоения содержания курса. Она позволяет не только обогатить содержание, но и обеспечить новые активные формы овладения им.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- наличие тестовых заданий к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- наличие инструментов изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Большое количество качественных образовательных ресурсов по всем предметам и классам размещено на сайтах Федерального центра информационных образовательных ресурсов (ФЦИОР) (http://fcior.edu.ru) и Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (ЕК ЦОР) (http://school-collection.edu.ru), федеральном ле «Российское образование» (http://www.edu.ru) и на прочих образовательных порталах.

На сайте http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/9a1eb241-6d33-0441-a75c-5d927b0d435b/118865/?&class=51 можно найти **электронное издание (ЭИ) «Математика, 5—11 классы»**, созданное по заказу Национального фонда подготовки кадров под руководством В. А. Булычёва при участии авторов учебников по математике Г. В. Дорофеева, С. Б. Суворовой, С. С. Минаевой, Л. О. Рословой.

Не заменяя собой учебник или другие учебные пособия, ЭИ обладает собственными дидактическими функциями:

- предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения математическими фактами; особенное значение это приобретает на этапе введения нового знания;
- отработка в интерактивном режиме элементарных базовых умений;
- усиление значимости и повышение удельного веса в учебном процессе исследовательской деятельности учащихся;
- возможность увеличения объёма предъявляемой для изучения информации, а также собственной практической деятельности ученика;
- увеличение доли содержательной работы ученика за счёт снятия проблем технического характера.

Мультимедийная среда организована таким образом, что при обучении математике более значимыми становятся наблюдение, разного рода эксперименты, математическое моделирование, конструирование. ЭИ содержит список виртуальных лабораторий, включающих инструментарий, который может использоваться учеником как при решении упражнений, снабжая его соответствующим компьютерным инструментом, так и для самостоятельного изучения возможностей применения этого инструментария. Кроме того, учитель может подготовить с помощью любой из виртуальных лабораторий набор собственных примеров для демонстрации и объяснения материала.

Учебный материал распределён в ЭИ по содержательным линиям. Внутри содержательной линии основной информационной единицей является тема, которая подразделяется на пункты. Пункт включает «Основные сведения» — краткий справочный материал, «Знакомство с инструментарием» — звуковое описание, демонстрация возможностей и задания, позволяющие овладеть инструментарием, «Упражнения», в ходе выполнения которых осваивается содержание. В него включены также методические рекомендации учителю по работе с мультимедиакомплексом.

Инструментарий, применяемый в ЭИ, весьма разнообразен, прост в употреблении и вполне адекватен целям обучения математике.

Особый вид упражнений, так называемый «Экспресс-контроль», предназначен для проверки важных практических умений, которыми должен владеть каждый учащийся. Каждый ученик получает один из шести вариантов контрольных заданий, выбранный случайным образом. В ЭИ реализована система общения учителя с учениками в виде классного журнала, одна из функций которого состоит в получении решения ученика на экране компьютера у учителя (причём не только ответа, но и состояния лаборатории).

При изучении вероятностно-статистической линии курса возможно также использование **ИУМК «Вероятность и статистика в школьном курсе математики»**, размещённого на том же сайте.

Планируемые результаты обучения алгебре в 7—9 классах

Этот раздел подготовлен на основе соответствующего раздела Примерной программы. При этом для удобства учителя включенные в программу предметные результаты детализированы и конкретизированы с учетом содержательно-методических особенностей данных учебников. Из этих же соображений несколько изменена структура раздела. Так, блоки «Ученик научится» и «Ученик получит возможность…», даны один за другим по каждой линии курса; планируемые результаты по блоку «Текстовые задачи», «распределены по другим содержательным линиям курса.

Элементы теории множеств и математической логики

Ученик научится:

- оперировать понятием «множество» и рядом связанных с ним понятий, а также соответствующей символикой;
- задавать множества в несложных случаях перечислением элементов, словесным описанием;
- находить объединение и пересечение множеств;
- изображать отношения между множествами с помощью кругов Эйлера;
- пользоваться теоретико-множественными понятиями и соответствующей символикой при изучении основных вопросов курса алгебры (уравнения, неравенства и системы, функции, элементы теории вероятностей и статистики), для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов.
- формулировать математические факты с использованием оборотов речи «если …, то …», «в том и только том случае»;
- оперировать понятиями «пример» и «контрпример».

Ученик получит возможность:

- распознавать истинные и ложные высказывания;
- формулировать математические факты с использованием связок «и», «или», «не»;
- определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать;
- проводить несложные доказательные рассуждения.

Числа

Выпускник научится:

- сравнивать и упорядочивать рациональные числа; выполнять вычисления с рациональными числами, сочетая устные и письменные приёмы вычислений, применение калькулятора;
- решать арифметические задачи, связанные с пропорциональностью величин, отношениями, процентами; выполнять несложные практические расчёты;
- использовать начальные представления о множестве действительных чисел;

- применять понятие квадратного корня; оценивать квадратные корни, находить квадратные и кубические корни, используя при необходимости калькулятор;
- использовать в ходе решения задач элементарные представления, связанные с приближёнными значениями величин; понимать, что числовые данные, которые используются для характеристики объектов окружающего мира, являются преимущественно приближёнными, что по записи приближённых значений, содержащихся в информационных источниках, можно судить о погрешности приближения.
- понимать смысл записи числа в стандартном виде, выполнять вычисления с числами, записанными в стандартном виде.

Выпускник получит возможность:
- научиться использовать приёмы, рационализирующие вычисления, приобрести привычку контролировать вычисления, выбирая подходящий для ситуации способ;
- развить представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел, о роли вычислений в реальной жизни;
- углубить и развить знания о десятичной записи действительных чисел (периодические и непериодические дроби).

<u>Тождественные преобразования</u>

Выпускник научится:
- понимать смысл терминов «выражение», «тождество», «тождественное преобразование»; выполнять стандартные процедуры, связанные с этими терминами; решать задачи, содержащие буквенные данные; выполнять элементарную работу с формулами;
- выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целым показателем; применять преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с целым показателем;
- выполнять тождественные преобразования рациональных выражений на основе правил действий над многочленами и алгебраическими дробями;
- выполнять разложение многочленов на множители;
- применять свойства квадратных корней для преобразования числовых выражений, содержащих квадратные корни;
- применять преобразования выражений для решения различных задач из математики, смежных предметов, реальной практики.

Выпускник получит возможность:
- овладеть широким набором способов и приёмов преобразования рациональных выражений, выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни; применять тождественные преобразования для решения задач из различных разделов курса (например, для нахождения наибольшего/наименьшего значения выражения).

Уравнения. Неравенства

Выпускник научится:

- оперировать понятиями: уравнение, корень уравнения, неравенство, решение неравенства, система уравнений, система неравенств; применять понятие равносильности уравнений, неравенств.
- решать основные виды рациональных уравнений с одной переменной (линейные, квадратные, вида $x^n = a$, где $n = 2, 3$, дробно-рациональные); решать системы двух уравнений с двумя переменными (линейные и в несложных случаях системы, в которых одно уравнение второй степени);
- применять аналитический и графический языки для интерпретации понятий, связанных с понятием уравнения, для решения уравнений и систем уравнений;
- проводить простейшие исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, и если имеет, то сколько, и т. д.);
- применять свойства числовых неравенств в ходе решения задач;
- решать линейные и квадратные неравенства с одной переменной; решать системы неравенств;
- понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций, решать текстовые задачи алгебраическим методом; применять уравнения и неравенства для решения задач из различных разделов курса, задач из реальной практики.

Выпускник получит возможность:

- использовать широкий спектр специальных приёмов решения уравнений и систем уравнений (замена переменных, разложение на множители, решение уравнений с двумя переменными в целых числах);
- решать в несложных случаях линейные и квадратные уравнения с параметрами, системы уравнений с параметрами;
- познакомится с методом интервалов для решения неравенств;
- использовать разнообразные приёмы доказательства неравенств;
- применять аппарат уравнений и неравенств для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, реальной практики.

Функции

Выпускник научится:

- понимать и использовать функциональные понятия и язык (термины, символьные обозначения);
- находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком, по значению аргумента; решать обратную задачу;
- строить графики элементарных функций; описывать свойства числовых функций на основе изучения поведения их графиков;
- моделировать реальные зависимости формулами и графиками; читать графики реальных зависимостей.

- понимать функцию как важнейшую математическую модель для описания процессов и явлений окружающего мира, применять язык функций для описания и исследования зависимостей между физическими величинами; интерпретировать в несложных случаях графики реальных зависимостей.

Выпускник получит возможность:

- проводить исследования, связанные с изучением свойств функций, в том числе с использованием компьютера;
- на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выколотыми» точками и т. п.);
- на примере квадратичной функции познакомиться с идеей преобразования графиков функций, использовать преобразования для построения графиков некоторых видов функций;
- использовать функциональные представления и свойства функций для решения математических задач из различных разделов курса.

Числовые последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии

Выпускник научится:

- понимать и использовать язык последовательностей (термины, символьные обозначения);
- применять формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессий, и аппарат, сформированный при изучении других разделов курса, к решению задач, в том числе с контекстом из реальной жизни.

Выпускник получит возможность:

- понимать арифметическую и геометрическую прогрессии как функции натурального аргумента; связывать арифметическую прогрессию с линейным ростом, геометрическую с экспоненциальным ростом.

Статистика и теория вероятностей

Выпускник научится:

- использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: представлять и читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;
- определять основные статистические характеристики числовых наборов;
- находить относительную частоту и вероятность случайного события в простейших случаях;
- решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций методом перебора;

Выпускник получит возможность:

- приобрести первоначальный опыт организации сбора данных при проведении опроса общественного мнения, осуществлять их анализ, представлять результаты опроса;

- приводить содержательные примеры использования средних для описания данных;
- оперировать понятиями дисперсия и стандартное отклонение; получить представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях;
- получить представление о роли практически достоверных и маловероятных событий в повседневной жизни, при изучении других предметов;
- приобрести опыт проведения экспериментов со случайными исходами, в том числе с помощью компьютерного моделирования, интерпретации результатов экспериментов;
- оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля; представлять информацию с помощью кругов Эйлера; применять правило произведения при решении комбинаторных задач; решать задачи на вычисление вероятности с подсчетом количества вариантов с помощью комбинаторики.

Содержание учебника для 9 класса

Учебник для 9 класса включает в себя следующие главы: «Неравенства», «Квадратичная функция», «Уравнения и системы уравнений», «Арифметическая и геометрическая прогрессии», «Статистика и вероятность».

Изучение курса начинается с обобщения и систематизации знаний о действительных числах: повторяются известные учащимся термины, рассматриваются отношения между числовыми множествами. Далее формулируются свойства числовых неравенств. Решение линейных неравенств с одной переменной сопровождается введением понятия равносильных уравнений и неравенств, формулировкой свойств равносильности уравнений и неравенств. Практические навыки получают развитие при решении систем линейных неравенств с одной переменной. Рассматривается также вопрос о доказательстве неравенств, учащиеся знакомятся с некоторыми приёмами доказательства неравенств и применяют их в ходе решения задач.

Изучение темы «Квадратичная функция» начинается с общего знакомства с функцией $y = ax^2 + bx + c$. Учащимся сообщается, что графиком квадратичной функции является парабола, рассматриваются готовые графики квадратичных функций и анализируются их особенности (например, наличие вершины, оси симметрии); Далее следует более детальное изучение квадратичной функции, её свойств, особенностей графика и приёмов его построения. И в теоретической части, и в системе упражнений значительное место отводится задачам прикладного характера. Завершается эта тема рассмотрением квадратных неравенств, решение которых основывается на графических представлениях, и первоначальным знакомством учащихся с методом интервалов.

В главе «Уравнения и системы уравнений» завершается изучение материала, относящегося к двум центральным линиям курса — алгебраическим выражениям и уравнениям. Прежде всего здесь уточняется известное из курса 7 класса понятие тождественного равенства двух рациональных выражений; его содержание раскрывается с двух позиций — алгебраической и функциональной. Вводится понятие тождества, обсуждаются приёмы доказательства тождеств (упражнения направлены на развитие навыков преобразования рациональных выражений). Далее систематизируются и углубляются знания учащихся о целых уравнениях; внимание при этом уделяется решению уравнений с помощью приёмов разложения на множители и введения новой переменной. Здесь же учащиеся впервые встречаются с решением уравнений, содержащих переменную в знаменателе дроби. Продолжается решение систем уравнений; рассматриваются системы, в которых одно уравнение первой, а другое — второй степени или дробное, и примеры систем, в которых оба уравнения нелинейные. Завершается глава фрагментом, посвящённым графическому исследованию уравнений с одной переменной.

Характерной особенностью изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» являются широта и разнообразие практических иллюстраций, акцент на связь изучаемого материала с окружающим миром. Введение понятий арифметической и геометрической прогрессий осуществляется на основе рассмотрения примеров с практической фабулой; объяснения и проводимые рассуждения сопровождаются графическими иллюстрациями. В теме обогащается и расширяется круг задач, связанных с процентными расчётами; на конкретных примерах иллюстрируются понятия простых и сложных процентов, которые позволяют рассмотреть большое число практико-ориентированных задач.

Темой «Статистика и вероятность» представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии курса. В ней рассматриваются доступные учащимся примеры комплексных статистических исследований, в которых используются полученные ранее знания о случайных экспериментах, способах представления данных и статистических характеристиках. В ходе описания исследований вводятся некоторые новые статистические понятия, отражающие их специфику. Включение данного материала направлено прежде всего на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые в средствах массовой информации.

Отметим, что в курсе предполагается широкое использование калькулятора везде, где это необходимо (например, для получения десятичного приближения квадратного корня, при решении задач на проценты, в обработке данных статистических исследований).

Примерное поурочное планирование учебного материала

Приводимое ниже поурочное планирование носит рекомендательный характер. Оно отражает некоторый усреднённый опыт, и, естественно, в конкретном классе при конкретных условиях число уроков на изучение того или иного пункта, главы может меняться. В то же время оно служит своего рода ориентиром, который поможет учителю рационально спланировать свою работу.

1-й в а р и а н т: 3 урока в неделю, всего 102 урока.

2-й в а р и а н т: 4 урока в неделю, всего 136 уроков.

Глава и пункт учебника		**Число уроков**	
		1-й вариант	**2-й вариант**
Глава 1. Неравенства		**18**	**23**
1.1	Действительные числа	2	3
1.2 1.3 1.4	Общие свойства неравенств Решение линейных неравенств Решение систем линейных неравенств	10	12
1.5	Доказательство неравенств	2	3
1.6	Что означают слова «с точностью до …»	2	3
	Обзор и контроль	2	2
Глава 2. Квадратичная функция		**19**	**24**
2.1	Какую функцию называют квадратичной	3	4
2.2 2.3	График и свойства функции $y = ax^2$ Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	6	8
2.4 2.5 2.6	График функции $y = ax^2 + bx + c$ Квадратные неравенства Метод интервалов	8	10
	Обзор и контроль	2	2
Глава 3. Уравнения и системы уравнений		**26**	**34**
3.1	Рациональные выражения	4	5
3.2 3.3 3.4	Целые уравнения Дробные уравнения Решение задач	10	13
3.5 3.6	Системы уравнений с двумя переменными Решение задач	7	9
3.7	Графическое исследование уравнений	3	5
	Обзор и контроль	2	2
Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**18**	**24**
4.1	Числовые последовательности	2	3

4.2 4.3	Арифметическая прогрессия Сумма первых n членов арифметической прогрессии	5	7
4.4 4.5	Геометрическая прогрессия Сумма первых n членов геометрической прогрессии	5	7
4.6	Простые и сложные проценты	4	5
	Обзор и контроль	2	2
Глава 5. Статистика и вероятность		**9**	**13**
5.1	Выборочные исследования	2	3
5.2	Интервальный ряд. Гистограмма	2	3
5.3	Характеристики разброса	2	3
5.4	Статистическое оценивание и прогноз	1	2
	Обзор и контроль	2	2
Обобщение и систематизация знаний. *Итоговая контрольная работа*		**12**	**18**

Рекомендации по организации учебного процесса

Глава 1. Неравенства (18 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
1.1. Действительные числа	2	О-1, «*Проверь себя*», П-1—П-5	1—14
1.2. Общие свойства неравенств 1.3. Решение линейных неравенств 1.4. Решение систем линейных неравенств	10	О-2, «*Проверь себя*», П-6 О-3, «*Проверь себя*», П-7—П-11 О-4, «*Проверь себя*», П-12—П-14	15—21 22—27 28—33
1.5. Доказательство неравенств	2	О-5, П-15	34—36
1.6. Что означают слова «с точностью до …»	2	О-6, П-16—П-17	37—40
Обзор и контроль	2		

Основные цели: познакомить учащихся со свойствами числовых неравенств и их применением к решению задач (сравнение и оценка значений выражений, доказательство неравенств и др.); выработать умение решать линейные неравенства с одной переменной и их системы.

Обзор главы. Изучение темы начинается с обобщения и систематизации знаний о действительных числах. Здесь речь идёт не о построении какой-либо теории действительных чисел, а повторяются известные учащимся термины — натуральные, целые, рациональные, действительные числа; рассматриваются отношения между соответствующими числовыми множествами; вводится понятие бесконечной десятичной дроби как универсального имени действительного числа, при этом вопрос о периодических и непериодических бесконечных десятичных дробях в общем тексте учебника не рассматривается, а отнесён к рубрике «Узнайте больше».

Далее формулируются свойства числовых неравенств, которые иллюстрируются геометрически, подтверждаются числовыми примерами. Рассмотрение вопроса о решении числовых неравенств с одной переменной сопровождается введением понятия равносильных уравнений и неравенств, формулировкой свойств равносильных уравнений и неравенств. Приём решения линейного неравенства сопоставляется с приёмом решения линейного уравнения, и акцент делается на сходство и различия в этих приёмах. Приобретённые учащимися умения получают развитие при решении систем линейных неравенств с одной переменной. Система упражнений содержит значительное число задач на применение аппарата неравенств.

В теме рассматривается также вопрос о доказательстве неравенств. Учащиеся знакомятся с некоторыми приёмами доказательства неравенств и применяют их в ходе решения несложных задач.

Основные виды деятельности. Приводить примеры иррациональных чисел; распознавать рациональные и иррациональные числа; изображать числа точками координатной прямой.

Находить десятичные приближения рациональных и иррациональных чисел; сравнивать и упорядочивать действительные числа. Описывать множество действительных чисел. Использовать в письменной математической речи обозначения и графические изображения числовых множеств, теоретико-множественную символику.

Использовать разные формы записи приближённых значений; делать выводы о точности приближения по записи приближённого значения.

Формулировать свойства числовых неравенств, иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически; применять свойства неравенств в ходе решения задач.

Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств с одной переменной. Доказывать неравенства, применяя приёмы, основанные на определении отношений «больше» и «меньше», свойствах неравенств, некоторых классических неравенствах.

Комментарий к использованию ЭИ. Основная цель использования ЭИ — создание дополнительных возможностей при систематизации знаний учащихся о действительных числах, а также наглядной опоры для усвоения понятия о числовых промежутках и соответствующих обозначений, для решения линейных уравнений с одной переменной и их систем.

Расширяются возможности использования инструментария «Координатная прямая». Использование координатной прямой в п. 2.1 ЭИ «Действительные числа» делает доступной и интересной учебную деятельность, направленную на усвоение сложного в идейном отношении материала о действительных числах. Упражнения № 1—4 способствуют развитию умений соотносить числа с координатной прямой, сравнивать и упорядочивать действительные числа. В упражнениях № 5—12 учащиеся в прямом смысле могут последовательно просматривать разряды десятичного приближения и делать выводы.

Упражнения п. 2.2 ЭИ «Числовые промежутки» помогают усвоению перехода от изображения числового промежутка к его обозначению, к записи в виде неравенства и наоборот. Упражнения п. 2.3 ЭИ «Линейные неравенства с одной переменной и их системы» направлены на отработку отдельных шагов решения простейших неравенств и их систем, в которых учащиеся допускают наибольшее число ошибок. Например, промежуточного шага, в котором потребуется умножить (или разделить) обе части неравенства на отрицательный коэффициент; заключительного шага решения любой системы неравенств, где потребуется найти общие решения неравенств, входящих в систему.

Учебник		ЭИ		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
1. Неравенства	1.1. Действительные числа	Алгебра, 7—9	2. Неравенства	2.1. Действительные числа
	1.3. Решение линейных неравенств			2.2. Числовые промежутки 2.3. Линейные неравенства с одной переменной и их системы, № 1—4
	1.4. Решение систем линейных неравенств			2.3. Линейные неравенства с одной переменной и их системы, № 5—9

1.1. Действительные числа

Методический комментарий

Пункт посвящён систематизации сведений о действительных числах. В значительной степени он содержит уже знакомый материал, поэтому появляется возможность повторить всё, что учащиеся уже знают о натуральных, целых, рациональных, иррациональных числах. В ходе повторения вводятся обозначения соответствующих числовых множеств: ***N***, ***Z***, ***Q***, ***R***. Желательно, чтобы учащиеся запомнили их.

Материал, связанный с теорией действительных чисел, сложен в идейном отношении и обычно плохо усваивается учащимися. В связи с этим содержание пункта тщательно отобрано — здесь рассматриваются только те вопросы, которые можно отнести к разряду общеобразовательных и целесообразно обсуждать со всеми учащимися. Прежде всего, вводится понятие множества действительных чисел — это рациональные и иррациональные числа вместе. Затем рассматривается вопрос об изображении действительных чисел точками на координатной прямой. На примере построения точки с координатой $\sqrt{2}$ учащимся демонстрируется тот факт, что рациональные числа не заполняют координатную прямую, и сообщается (конечно, без доказательства), что действительных чисел оказывается уже достаточно для заполнения всей прямой. Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что именно взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и точками координатной прямой позволяет использовать в математике два равноправных языка — алгебраический и геометрический.

Принципиальным в принятой методике является следующее: бесконечная десятичная дробь не является исходным понятием для определения действительного и иррационального чисел (как это делается в ряде учебников), а рассматривается как универсальное имя действительного числа. При этом вопрос о периодических и непериодических дробях отнесён к необязательному материалу — он включён в п. 1.7 (*«Узнайте больше»*).

Разбирая примеры обращения обыкновенных дробей в десятичные, учащиеся убеждаются в том, что любое рациональное число можно изобразить бесконечной десятичной дробью. Далее сообщается, что любое иррациональное число также изображается десятичной дробью, и на примере числа $\sqrt{2}$ показывается, как получаются последовательные цифры соответствующей бесконечной десятичной дроби, а также то, что его нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.

При выполнении упражнений везде, где это необходимо, предполагается использование калькулятора. Например, с помощью калькулятора следует находить десятичные приближения квадратных корней, калькулятор можно использовать и для определения в непростых случаях нескольких первых цифр десятичных представлений рациональных чисел.

Основным результатом изучения материала является усвоение введённой терминологии, умение сравнивать и упорядочивать действительные числа, умение соотносить их с координатной прямой.

В ходе выполнения упражнений **1**—**6** из раздела **А** повторяется и усваивается введённая в пункте терминология и символика. Упражнения **7**—**13** посвящены отработке умения соотносить числа с координатной прямой. Задания **14**—**18** — это разнообразные задачи из различных разделов курса, включающие работу с рациональными и иррациональными числами. И наконец, группа упражнений **19**—**23** посвящена представлению действительных чисел бесконечными десятичными дробями, сравнению и упорядочиванию действительных чисел.

В разделе **Б** несколько расширяются знания о структурных свойствах числовых множеств — при выполнении упражнений **24**—**27** и **33**, **34** учащиеся знакомятся с понятием замкнутости множества относительно некоторой операции, проверяют наличие этого свойства у множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ относительно арифметических операций, проводят некоторые доказательства.

Комментарий к упражнениям

Упражнения **1**—**3** посвящены закреплению терминологии, понимания отношений между числовыми множествами.

2. а) Верно, так как множество целых чисел состоит из натуральных чисел, противоположных им отрицательных чисел и числа 0; б) неверно; например, число –7 — целое число, но оно не является натуральным.

Упражнения **4**—**6** посвящены закреплению введённой символики.

5. г) $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \boldsymbol{R}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{5} \notin \boldsymbol{Q}$.

10. На рисунке 1.1 показано, как построить точку $\sqrt{2}$. Далее пользуемся циркулем для того, чтобы отметить каждую из данных точек. Запишем числа в порядке возрастания: $-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}$.

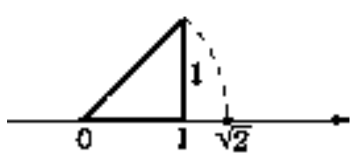

Рис. 1.1

11. $\frac{1}{3} < 1$; $1 < \sqrt{3} < 2$; $2 < \sqrt{5} < 3$; $3 < \sqrt{10} < 4$. Значит, точке A соответствует число $\sqrt{3}$, точке B — число $\sqrt{10}$.

12. $1 < \frac{\pi}{2} < 2$; $2 < \frac{2\pi}{3} < 3$; $1 < \frac{3}{2} < 2$; $0 < \frac{2}{3} < 1$. Значит, точке C соответствует число $\frac{2}{3}$, точке D — число $\frac{2\pi}{3}$.

14. а) Корни являются рациональными числами: $x_1 = 0{,}4$ и $x_2 = -0{,}4$;

б) корни являются иррациональными числами: $x_1 \approx 0{,}8$ и $x_2 \approx -0{,}8$;

в) корни являются иррациональными числами: $x_1 \approx 2{,}8$ и $x_2 \approx -2{,}8$;

г) корни являются рациональными числами: $x_1 = 0{,}8$ и $x_2 = -0{,}8$.

15. а) $AB = BC = \sqrt{2}$, иррациональное число; $AC = 2$, рациональное число; б) $AC = 2$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$.

Дополнительное задание. Можно предложить учащимся найти десятичные приближения иррациональных длин с одним или двумя знаками после запятой.

16. Упражнение позволит повторить формулы сокращённого умножения и свойства квадратных корней.

О т в е т: а) 3 — рац.; б) $4 - 2\sqrt{3}$ — иррац.; в) $21 - 4\sqrt{5}$ — иррац.; г) 90 — рац.; д) $18\sqrt{2}$ — иррац.; е) $\frac{1}{6}$ — рац.

17. На рисунке изображены прямые вида $y = kx$. Основанием для выбора ответа являются известные учащимся из курса 8 класса свойства углового коэффициента прямой. Прямые $y = \sqrt{2}x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ проходят через I и III координатные четверти, значит, это прямые $\boxed{3}$ и $\boxed{4}$. Более крутая прямая имеет больший угловой коэффициент. Поэтому прямой $y = \sqrt{2}x$ соответствует прямая $\boxed{3}$ и прямой $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ соответствует прямая $\boxed{4}$.

Для прямой $\boxed{3}$: если $x = 1$, то $y = \sqrt{2}$; при $y = 4$ $\quad x = 4\sqrt{2}$.

Для прямой $\boxed{4}$: если $x = 1$, то $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; при $y = 4$ $\quad x = 2\sqrt{2}$.

Для прямых $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ проводятся аналогичные рассуждения. Прямой $y = -\sqrt{2}x$ соответствует прямая $\boxed{2}$; если $x = 1$, то $y = -\sqrt{2}$; при $y = 4$ $x = -4\sqrt{2}$. Прямой $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствует прямая $\boxed{1}$; если $x = 1$, то $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; при $y = 4$ $\quad x = -2\sqrt{2}$.

18. а) График функции $y = \frac{2}{x}$ — гипербола. Найдём координаты точки графика, для которой $x = y = a$: $a = \frac{2}{a}$, откуда $a^2 = 2$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = -\sqrt{2}$.

Таким образом, две точки, принадлежащие разным ветвям гиперболы, имеют равные абсциссы и ординаты: $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; координаты этих точек — иррациональные числа.

б) График функции $y = -\frac{6}{x}$ — гипербола. Найдём координаты точки графика, для которой $x = a$, $y = -a$: $-a = \frac{-6}{a}$, откуда $-a^2 = -6$, $a^2 = 6$, $a_1 = \sqrt{6}$, $a_2 = -\sqrt{6}$. Таким образом, две точки, принадлежащие разным ветвям гиперболы, имеют противоположные абсциссу и ординату: $(-\sqrt{6};\ \sqrt{6})$ и $(\sqrt{6};\ -\sqrt{6})$; координаты этих точек — иррациональные числа.

19. Обратим внимание на запись числа в виде бесконечной десятичной дроби: выписывается требуемое число десятичных знаков (без округления) и ставится многоточие.

О т в е т: а) 0,272…; б) 0,718…; в) 11,224…; г) 1,536… .

Можно предложить *дополнительное задание*: используя калькулятор, запишите две десятичные дроби с одним, двумя, тремя, четырьмя знаками после запятой, между которыми заключено данное число.

20. О т в е т: е) $\approx 0{,}08$; з) $\approx 0{,}90$; и) $\approx 3{,}00$.

22. Воспользуемся представлением действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей и будем сравнивать дроби поразрядно, записывая результат в виде неравенства:

а) $\frac{2}{9} = 0{,}22\ldots$, $0{,}22\ldots < 0{,}23$, следовательно, $\frac{2}{9} < 0{,}23$;

г) $1\frac{5}{7} = 1{,}714\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$, следовательно, $1\frac{5}{7} < \sqrt{3}$.

27. Приведём примеры.

Сумма: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$.

Разность: $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$, $(\sqrt{2} + 3) - (\sqrt{2} - 1) = 4$.

Произведение: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

Частное: $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3}$.

Множество иррациональных чисел не замкнуто относительно каждой из арифметических операций.

28. Упражнение выполняется без калькулятора: сравниваются два числа, а затем либо противоположные, либо обратные им. Например, $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, значит, $-\sqrt{3} > -\sqrt{5}$. Для наглядности можно воспользоваться координатной прямой, показав на ней взаимное расположение чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ и соответственно $-\sqrt{3}$ и $-\sqrt{5}$.

29. 1) Прежде чем выполнять задание, целесообразно вспомнить определение модуля числа.

Число $2 - \sqrt{5}$ отрицательное, значит, модуль этого числа равен $-(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$. Таким образом, по определению модуля верно второе равенство.

О т в е т: 3) а) $\sqrt{2} - 1$; б) $\sqrt{20} - 4$; в) $\sqrt{15} - \sqrt{10}$; г) $\pi - 3$.

Решение можно записать так: а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

30. Для ответа на вопрос преобразуем данное выражение.

О т в е т: а) рац.; б) иррац.; в) рац.; г) иррац.; д) иррац.; е) рац.

Можно предложить учащимся в качестве *дополнительного задания* объяснить, почему число, полученное, например, в пункте «б», является иррациональным. Для объяснения они могут воспользоваться результатом упражнения **26**.

31. а) Нет. Объяснение может быть таким. Если график проходит через какую-нибудь точку с рациональными координатами, то они должны удовлетворять уравнению $xy = \sqrt{2}$, что невозможно: слева будет рациональное число, а справа — иррациональное.

б) $\left(\sqrt{\sqrt{2}};\ \sqrt{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\sqrt{2}};\ -\sqrt{\sqrt{2}}\right)$.

32. а) Нет; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}};\ -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}};\ -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)$.

33. В первых двух случаях ответ «нет», в третьем — «да».

34. а) Сложение: нет; например, $2^1 + 2^3 = 10$.

Вычитание: нет; например, $2^1 - 2^3 = -6$.

Умножение: да; $2^k \cdot 2^n = 2^{k+n}$, k и n — натуральные числа.

Деление: нет; например, $2^1 : 2^3 = 2^{-2}$.

Данное множество замкнуто относительно умножения.

б) Пусть $2n$ и $2m$ (где n и m — целые числа) — два чётных числа.

Сложение: да; $2n + 2m = 2(n + m)$ — чётное число.

Вычитание: да; $2n - 2m = -2(n - m)$ — чётное число.

Умножение: да; $2n \cdot 2m = 4nm$ — чётное число.

Деление: нет; например, $6 : 2 = 3$ — нечётное число.

Данное множество замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения.

в) Сложение: нет; например, $3 + 5 = 8$.

Вычитание: нет; например, $3 - 5 = -2$.

Умножение: да; пусть $2n - 1$ и $2m - 1$ (где n и m — целые числа) — два нечётных числа, тогда $(2n - 1)(2m - 1) = 4nm - 2m - 2n + 1 = 2(2mn - m - n) + 1 = 2p + 1$ — нечётное число (p — некоторое целое число).

Деление: нет; например, $3 : 5 = \frac{3}{5}$.

Данное множество замкнуто относительно умножения.

г) Сложение: да;

$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$.

Вычитание: да;

$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}$.

Умножение: да;

$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$.

Деление: нет; например,

$$\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{7} = \frac{11-6\sqrt{2}}{7} = \frac{11}{7} - \frac{6}{7}\sqrt{2}.$$

Данное множество замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения.

1.2. Общие свойства неравенств

Методический комментарий

Свойства неравенств, рассматриваемые в пункте, вводятся в сопоставлении со свойствами равенств — подчёркивается аналогия и различие в их свойствах. Особенностью подхода является то, что изложение основывается на геометрическом определении неравенства, в связи с чем все свойства обосновываются с помощью координатной прямой, а также иллюстрируются конкретными примерами. Следует иметь в виду, что такое геометрическое обоснование вполне корректно. Алгебраическая трактовка неравенства на основе определения знака разности будет дана позднее, в п. 1.5 «Доказательство неравенств». Многие из выведенных в этом пункте свойств можно будет обосновать алгебраически.

В результате изучения пункта учащиеся должны научиться применять свойства неравенств для перехода от одних неравенств к другим, а также для оценки суммы и произведения по заданным границам слагаемых или множителей. Именно этому посвящена система упражнений. Среди них целесообразно обратить внимание на упражнения **59**—**63**, **69**—**71**, которые являются задачами с прикладным содержанием и могут показать учащимся возможность практического применения получаемых знаний.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно не рассматривать упражнения из раздела **Б**.

Комментарий к упражнениям

Упражнения **35**—**36** требуют применения свойства транзитивности.

36. Перепишем данные неравенства в виде неравенств одного знака и воспользуемся свойством транзитивности неравенств:

если $a < c$, $c < b$, $b < d$, то $a < b$, $a < d$ и $c < d$.

Можно на координатной прямой отметить числа a, b, c, d, удовлетворяющие условию, и убедиться наглядно в правильности вывода.

Цель заданий **38—39** — поработать со свойством транзитивности применительно к строгим и нестрогим неравенствам. При выполнении упражнений целесообразно опираться на координатную прямую. Это позволит избежать ошибок в определении знака неравенства.

38. в) Если $a < b$, $b \leq c$, то $a < c$;

г) если $a \leq b$, $b < c$, то $a < c$.

39. О т в е т: а) $a < d$; в) $a \geq d$.

42. а) Так как $7 = \sqrt{49}$, $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$, то верна цепочка неравенств $\sqrt{32} < \sqrt{49} <$ $< \sqrt{50}$. Поэтому данные числа запишем в порядке возрастания так: $4\sqrt{2}$, 7, $\sqrt{50}$.

О т в е т: б) 3,5; 3,555…; $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{3}$; г) $4\sqrt{5}$, 9, 3π.

Упражнения **43—49** посвящены применению следующих двух свойств неравенств — о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа и об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число, а также их следствий.

49. в) Так как $\frac{3}{7}m > \frac{3}{7}n$ — верное неравенство, то, умножив обе его части на число $-\frac{7}{3}$, получим верное неравенство $-m < -n$. Следовательно, неверно, что $-m > -n$.

Упражнения **50—63** направлены на отработку двух последних свойств — о почленном сложении и умножении неравенств.

51. В рассуждениях используем почленное сложение неравенств и свойство транзитивности неравенств.

а) Если $x > 2$ и $y > 10$, то $x + y > 12$ — верно (свойство о почленном сложении неравенств). Если $x > 2$ и $y > 10$, то $x + y > 10$ — верно (свойство о почленном сложении неравенств и свойство транзитивности). Если $x > 2$ и $y > 10$, то $x + y > 20$ — неверно.

52. б) Так как $298 < 300$, $275 < 300$ и $361 < 400$, то $298 + 275 + 361 < 300 + 300 +$ $+ 400 = 1000$. Значит, данная сумма меньше 1000.

61. а) При почленном умножении неравенств получим границы площади с двумя знаками после запятой: $5{,}12 \leq ab \leq 5{,}61$. Частой ошибкой учащихся является то, что они округляют полученные числа по правилам округления, не учитывая свойств неравенств. Поэтому здесь важно обсудить, какими числами следует заменить каждую из полученных границ: левую границу следует брать с недостатком, а правую — с избытком, чтобы неравенство осталось верным. Для убедительности целесообразно воспользоваться координатной прямой (рис. 1.2). Получаем $5{,}1 \leq ab \leq 5{,}7$ и $9{,}6 \leq 2\,(a + b) \leq$ $\leq 10{,}0$.

Рис. 1.2

62. Пусть x мин — время, затрачиваемое на дорогу от дома до метро, а y мин — время на поездку в метро, тогда $10 \le x \le 15$ и $18 \le y \le 20$. Отсюда следует, что время на дорогу от дома до места встречи оценивается неравенством $28 \le x + y \le 35$.

О т в е т: а) да; б) нет; в) неизвестно.

63. О т в е т: возможно, так как согласно неравенству $48{,}5 < 3a + 10b < 65{,}2$ границы размещения книг не превышают 80 см (размеров полки).

64. В случае затруднений порекомендуйте учащимся обратиться к координатной прямой.

65. а) Так как $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$, $\sqrt{0{,}5} > 0{,}7$, $\sqrt{0{,}3} < 0{,}6$, то данные числа располагаются в порядке возрастания так: $\sqrt{0{,}3}$; 0,66; 0,666; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{0{,}5}$.

б) Так как $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$, $\sqrt{0{,}02} < \sqrt{0{,}0256} = 0{,}16$ и $\sqrt{0{,}046} > \sqrt{0{,}04} > 0{,}2$, то данные числа располагаются в порядке возрастания так: $\sqrt{0{,}02}$; 0,16; 0,166; $\frac{1}{6}$; $\sqrt{0{,}046}$.

66. а) Возможны разные способы решения. Например, преобразуем дроби к виду дробей с числителем 1: $2\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Так как $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < 6$, то данные числа располагаются в порядке возрастания так: $\frac{1}{6}$; $2\sqrt{\frac{1}{20}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) О т в е т: $\frac{\sqrt{7}}{7}$; $2\sqrt{0{,}1}$; $\frac{7}{\sqrt{7}}$; $2\sqrt{2}$.

67. а) Из неравенства $a - 2 < b - 2$ следует, что $a < b$, а так как $b < -1$, то $a < -1$, т. е. число a отрицательное.

О т в е т: б) полож.; в) отриц.; г) полож.

68. а) Если $a \ge b$, то $a + 2 \ge b + 2$, но $b + 2 > b + 1$, следовательно, $a + 2 > b + 1$.

О т в е т: б) $a + 10 > b - 1$; в) сравнить невозможно; г) $1 - 2a \le 3 - 2b$.

69. Оценим массу бука и массу ясеня (в тоннах), воспользовавшись формулой $m = V\rho$: $1{,}4 < m_{\text{бука}} < 1{,}8$, $1{,}8 < m_{\text{ясеня}} < 2{,}4$. Отсюда следует, что $3{,}2 < m_{\text{бука}} + m_{\text{ясеня}} < 4{,}2$, и перевозка на 5-тонном автомобиле возможна.

70. С помощью калькулятора находим: $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$. Значит, $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ и $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Оценим площадь: вычислив, найдём, что $1{,}22 < S < 1{,}24$, откуда $1{,}2 < S < 1{,}3$.

71. В доказательстве воспользуемся неравенством треугольника и свойствами числовых неравенств.

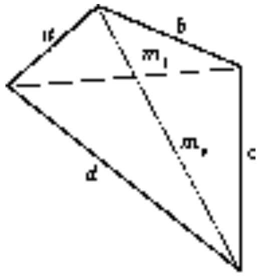

Рис. 1.3

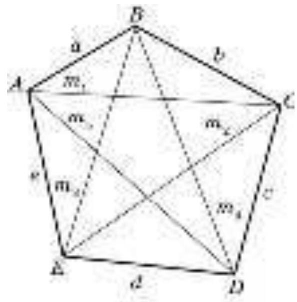

Рис. 1.4

а) Из неравенства треугольника (рис. 1.3): $a + b > m_1$, $c + d > m_1$, $a + d > m_2$, $b + c > m_2$. Сложим почленно эти неравенства: $2(a + b + c + d) > 2(m_1 + m_2)$. Отсюда $a + b + c + d > m_1 + m_2$.

б) Воспользуемся рисунком 1.4:

Из треугольника ABC: $m_1 < a + b$.

Из треугольника BCD: $m_4 < b + c$.

Из треугольника CDE: $m_2 < c + d$.

Из треугольника DEA: $m_5 < d + e$.

Из треугольника EAB: $m_3 < e + a$.

Сложим почленно все неравенства:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 < 2\,(a + b + c + d + e).$$

Разделим обе части неравенства на 2:

$$P > \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5).$$

72. а) Чтобы воспользоваться свойством почленного сложения неравенств, определим границы $-y$: если $10 < y < 11$, то $-10 > -y > -11$ или можно записать иначе: $-11 < -y < -10$, а тогда верно неравенство $-8 < x - y < -6$.

73. 1) Если $m > 0$ и $n < 0$, то $\frac{1}{m} > 0$, а $\frac{1}{n} < 0$, следовательно, $\frac{1}{m}$ всегда больше $\frac{1}{n}$.

Если же числа m и n одного знака и $m > n$, то $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$.

2) Сначала расположим в порядке возрастания числа m, n, p и q: $q < n < m < p$. Следовательно, $\frac{1}{p} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{q}$.

3) $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$, $3 < \frac{x}{y} < 5$.

1.3. Решение линейных неравенств

Методический комментарий

Материал пункта посвящён формированию умения решать линейные неравенства с одной переменной и применять аппарат неравенств для решения задач как математических, так и фабульных (с практическим содержанием). Кроме того, в пункте систематизируются и обобщаются сведения о линейных уравнениях, знания учащихся о линейных уравнениях и линейных неравенствах увязываются в единое целое.

В пункте выделяются три смысловых фрагмента. В первом фрагменте вводится алгоритм решения линейного неравенства. Он сопоставляется с алгоритмом решения линейного уравнения — указывается на их явное сходство и отмечаются различия. Еще более наглядному проявлению связи между этими вопросами способствует рисунок 1.17 учебника, где на одной координатной прямой отмечены решения линейного уравнения и двух соответствующих неравенств.

Необходимо иметь в виду, что такой подход предоставляет возможность впоследствии, при отработке умения решать неравенства, дать учащимся в руки инструмент для самопроверки. Так, в случае сомнений в правильности решения ученик сможет поступить следующим образом: решить соответствующее линейное уравнение $f(x) = g(x)$. Корень этого уравнения разобьёт координатную прямую на два луча, один из которых служит множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$, а другой — множеством решений неравенства $f(x) < g(x)$. Подставив в исходное неравенство какое-нибудь число из каждого из этих промежутков, можно проверить правильность полученного решения.

Тем учащимся, которые будут часто ошибаться при делении на отрицательный коэффициент, целесообразно порекомендовать такой полезный приём. Получив неравенство, например, $-10x > -25$, можно избавиться от отрицательного коэффициента при переменной; для этого надо умножить обе части неравенства на -1 и одновременно поменять знак неравенства на противоположный: $10x < 25$. После этого закончить решение.

Второй фрагмент пункта связан с введением понятия равносильности уравнений и неравенств. Разъясняется термин «равносильные уравнения (неравенства)», и уже известные учащимся правила преобразования уравнений и неравенств формулируются как правила, позволяющие переходить от одного уравнения (неравенства) к другому, ему равносильному. Здесь этот материал следует рассматривать как обобщающий, но в главе 3 он уже понадобится, по существу, при рассмотрении уравнений с переменной в знаменателе.

И наконец, третий фрагмент — исследование линейных уравнений и неравенств, в том числе рассмотрение случаев, когда уравнение (неравенство) не имеет решений или имеет бесконечное множество решений. Этот материал следует разобрать со всеми учащимися, однако не надо требовать умения решать соответствующие уравнения (неравенства) от всех девятиклассников.

В ходе выполнения упражнений **74—76** учащиеся усваивают теоретический материал. Группа упражнений **77—83** направлена на отработку умения решать линейные неравенства, причём в них отражены все типичные случаи. В разделе **Б** эту же цель преследуют упражнения **92**—**93**, а также **94**—**96**, которые дополнены требованием найти решения неравенства, удовлетворяющие некоторым условиям. Выполняя упражнения **84**—**89** (раздел **А**) и **99**—**102** (раздел **Б**), учащиеся применяют неравенства для решения разнообразных задач.

К обязательным результатам изучения материала относится умение решать несложные линейные неравенства (упражнения 6—8 из рубрики «Чему вы научились (*Это надо уметь*)».

В классах с невысоким уровнем подготовки можно опустить выполнение упражнений **92**, **93**, **96** из раздела **Б**, сложных в техническом отношении. Из группы упражнений **99**—**102** можно разобрать какое-нибудь одно, не требуя, конечно, при этом от учащихся умения решать подобные задачи самостоятельно.

Комментарий к упражнениям

77—80. Выполняются элементарные преобразования, основанные на использовании свойств неравенств. При ответе у доски полезно, чтобы учащиеся проговаривали их (хотя бы на первых порах).

81. Упражнение требует от учащихся хороших навыков раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в левой и правой частях неравенства.

82—83. По аналогии с решением уравнений сначала надо избавиться от дробей, входящих в неравенство, умножив обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей.

87. а) Пусть в грузовике находится x мешков с картофелем, тогда масса груза равна $40x$ кг. Число мешков, которое можно перевозить на грузовике, должно удовлетворять неравенству $40x + 4500 \leq 7000$, откуда $40x \leq 2500$, $x \leq 62$.

О т в е т: не более 62 мешков.

При решении задач **88**—**89** используется неравенство треугольника.

88. а) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (рис. 1.5). Поэтому надо найти такие значения z, при которых выполняются три неравенства: $z < 22$, $12 < z + 10$, $10 < z + 12$.

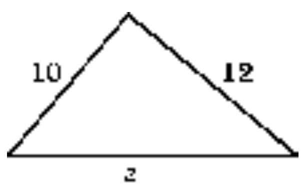

Рис. 1.5

Решим второе и третье неравенства: $z > 2$, $z > -2$. Последнее неравенство выполняется при любом значении стороны z, а первое и второе — при $2 < z < 22$.

О т в е т: 2 см $< z <$ 22 см.

Задача является пропедевтикой систем неравенств, но решается без введения этого термина, по смыслу. При изучении п. 1.4 можно будет обратить внимание учащихся на то, что фактически они уже решали системы неравенств и что «система» — это просто в данном случае термин, заменяющий длинную формулировку задачи: «найти все значения переменной, при которых одновременно выполняется несколько неравенств».

89. а) Обозначим искомое расстояние буквой x (рис. 1.6). Так как все три здания могут оказаться и на одной прямой, то в неравенстве треугольника следует взять знак нестрогого неравенства (каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из них не превосходит суммы двух других расстояний):

$x \le 500 + 800$, $800 \le x + 500$, $500 \le x + 800$. Отсюда $300 \le x \le 1300$.

О т в е т: от 300 м до 1300 м.

Рис. 1.6

94. а) Решим неравенство

$$(-x^2 + x - 7) - (12 + 6x - x^2) < 0.$$

Получим $x > -3\frac{4}{5}$. Наименьшее целое число, при котором выполняется неравенство, — это число -3. При затруднениях целесообразно обратиться к координатной прямой.

95. а) Решив данное неравенство, получим $x < 12$. Следовательно, положительные решения данного неравенства — это промежуток (0; 12).

Ответ можно также записать в виде $0 < x < 12$.

96. При выполнении упражнения на последнем этапе решения — после того как решено неравенство и надо выделить решения, удовлетворяющие заданному условию, — целесообразно обращаться к координатной прямой.

а) Решением неравенства является промежуток $x > -1$. Изобразим это решение, а также данный отрезок на координатной прямой (рис. 1.7).

О т в е т: $(-1; 3]$.

Рис. 1.7

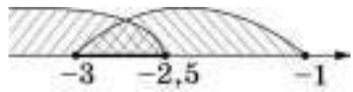

Рис. 1.8

б) Решение заданного неравенства: $x \le -2{,}5$. Промежутку $[-3; -1]$ принадлежат все x, удовлетворяющие неравенству $-3 \le x \le -2{,}5$ (рис. 1.8).

О т в е т: $[-3; -2{,}5]$.

98. б) Решим данное уравнение относительно x. Имеем $x + 1 = \frac{2a+5}{6}$, откуда $x = \frac{2a-1}{6}$. Решив неравенство $\frac{2a-1}{6} > 0$, сделаем вывод: корень уравнения является числом положительным при $a > \frac{1}{2}$. Возьмём какое-нибудь значение a из найденного множества: например, при $a = 1$ получим $x = \frac{1}{6}$ — число положительное.

99. а) $D = 100 - 8c$, $100 - 8c < 0$, $c > 12{,}5$. При любом c, большем 12,5, уравнение не имеет корней. Поэтому будем последовательно сравнивать каждое из данных чисел с 12,5 и делать соответствующее заключение. При $c = 15{,}7$ уравнение не имеет корней, при всех остальных значениях c — имеет.

100. Здесь часто учащиеся допускают ошибки, забывая исключить из найденного промежутка значений a число 0. Поэтому надо обратить внимание учащихся на то, что уравнение является квадратным, т. е. может иметь два корня только при $a \ne 0$.

а) $a \ne 0$, $D = 4 - 24a$, $4 - 24a > 0$, откуда $a < \frac{1}{6}$.

О т в е т: при $a < \frac{1}{6}$ и $a \ne 0$.

Ответ можно записать и так: $a < 0$, $0 < a < \frac{1}{6}$, или с помощью промежутков: $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{6}\right)$. Чтобы избежать формализма в выполнении этого задания и непонимания сути решаемой задачи, полезно предложить учащимся записать какое-либо конкретное уравнение с конкретным значением a, удовлетворяющее данному условию. Можно задать *дополнительный вопрос*: при каких значениях a уравнение имеет корни, т. е. имеет два или один корень?

101. Квадратный трёхчлен можно разложить на множители, если он имеет корни, т. е. $64 - 8c \geq 0$. Отсюда $c \leq 8$. Теперь из полученного промежутка выделим все целые положительные значения c: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Дополнительное задание. Выберите какое-нибудь из полученных значений c и разложите соответствующий трёхчлен на множители.

1.4. Решение систем линейных неравенств

Методический комментарий

При введении понятия «система неравенств» целесообразно обратить внимание учащихся на то, что фактически им уже приходилось решать системы в предыдущем пункте (например, задачи **88** и **89**). А словосочетание «решить систему неравенств» означает то же самое, что «найти общие решения неравенств» или же «найти значения переменной, удовлетворяющие одновременно двум или нескольким неравенствам». Иными словами, ничего принципиально нового в изучаемом материале нет, и основная цель, которая стоит перед учеником, — внимательно и аккуратно решить входящие в систему неравенства и научиться находить эти общие решения. Вводная задача пункта и служит разъяснением изложенного.

При решении упражнений здесь и в дальнейшем целесообразно требовать от учащихся на последнем этапе решения обращаться к координатной прямой. Иногда в целях самопроверки полезно взять по одному числу из получившихся на прямой промежутков и подставить в систему, чтобы убедиться в том, что выбран нужный ответ.

Упражнения **103—104** направлены на усвоение понятия системы неравенств и на отработку заключительного шага решения любой системы, в котором обычно допускается наибольшее число ошибок. Поэтому эти упражнения не следует пропускать.

Упражнения **105—108** нацелены собственно на отработку умения решать системы неравенств, а **109—110** — двойных неравенств. Заметим, что в тексте пункта показаны два способа решения двойного неравенства — записи его в виде системы и последующего её решения, а также ведения записи решения с помощью двойного неравенства. Следует иметь в виду, что меньше ошибок учащиеся допускают при использовании первого из них. Поэтому тем школьникам, которые ещё не достигли уверенности при решении двойных неравенств, можно рекомендовать первый способ их решения.

Заключительная группа упражнений из раздела **А** (**111—113**) — это текстовые задачи, решаемые с помощью систем неравенств.

Упражнения из раздела **Б** — это более сложные в техническом отношении системы (**114—115**), системы, содержащие более двух неравенств (**116—117**), а также задания на применение систем к решению задач — исследованию функций, нахождению области определения выражений (**121**, **122**).

К обязательным результатам обучения относятся умения решить несложную систему неравенств и несложное двойное неравенство (задания 9, 10 из рубрики «Чему вы научились (*Это надо уметь*)».

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться выполнением упражнений из раздела **А**, из раздела **Б** целесообразно рассмотреть упражнения **120—122**.

Комментарий к упражнениям

109—110, 115. Полезно показать учащимся две возможные формы записи решения двойного неравенства по образцам, приведённым в объяснительном тексте (пример 3). Потренировавшись, ученик сможет сам выбрать удобную ему запись решения.

111. а) Пусть шариковая ручка стоит x р. Тогда один класс заплатил $(20 \cdot 4 + x \cdot 12)$ р., что меньше 200 р. Другой класс заплатил $(20 \cdot 1 + x \cdot 15)$ р., и это больше 200 р. Имеем систему неравенств $\begin{cases} 80 + 12x < 200 \\ 20 + 15x > 200. \end{cases}$ Отсюда получим $\begin{cases} x < 10 \\ x > 12. \end{cases}$ Эта система не имеет решений, следовательно, рассматриваемая ситуация невозможна.

б) Пусть стоимость одного килограмма моркови x р. По условию задачи составим систему уравнений и решим её. Имеем $30 < x < 40$, следовательно, рассматриваемая ситуация возможна.

112. а) Обозначим целое положительное число буквой a. По условию составим систему неравенств: $\begin{cases} a + 7 < 3a \\ a + 10 > 2a. \end{cases}$ Решив систему, получим $3{,}5 < a < 10$. Таким образом, могло быть задумано одно из чисел: 4, 5, 6, 7, 8, 9.

113. б) Обозначим длину третьей стороны буквой x. Составим систему неравенств по условию задачи:

$$\begin{cases} x < 13 \\ 8 < x + 5 \\ 5 < x + 8 \\ x + 13 \le 20. \end{cases}$$

Получим $\begin{cases} x < 13 \\ x > 3 \\ x > -3 \\ x \le 7. \end{cases}$

Чтобы найти решение системы, изобразим полученные промежутки на координатной прямой (рис. 1.9). Решением системы является промежуток $3 < x \le 7$. Учитывая условие, что стороны треугольника выражаются различными целыми числами, запишем ответ: 4 см, 6 см или 7 см.

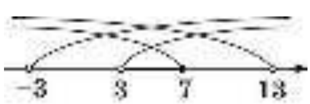

Рис. 1.9

114. б) Разделим обе части первого неравенства на 2, а обе части второго неравенства умножим на 6. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые в левых частях неравенств, придём к системе $\begin{cases} -y-7<5 \\ y-17<0, \end{cases}$ решив которую, получим $12 < y < 17$.

В упражнениях **116—117** при нахождении общих решений полученных неравенств следует обязательно пользоваться координатной прямой.

117. При решении пункта «в» целесообразно порекомендовать учащимся записывать двойные неравенства в виде системы двух неравенств — это уменьшит возможность появления технических ошибок.

120. 1) Запишем соответствующую условию систему неравенств: $\begin{cases} -2x+4>0 \\ \dfrac{1}{2}x+2>0. \end{cases}$

Решив систему, получим, что $-4 < x < 2$. Теперь изобразим в координатной плоскости графики данных функций — это прямые, пересекающие ось абсцисс соответственно в точках 2 и -4. Убедимся, что данные функции одновременно принимают положительные значения в промежутке $(-4; 2)$. Следует отметить, что учащимся ответить на этот вопрос проще аналитически, чем по графику.

2) Это задание выполняется по графику. Оно полезно для того, чтобы ещё раз убедиться в правильности аналитического решения.

3) По графику видно, что не существуют. Проверим ответ аналитически, а для этого решим систему неравенств $\begin{cases} -2x + 4 < 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 2 < 0. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

121. В отличие от предыдущего задания здесь возможны все сочетания знаков функций. Опыт показывает, что когда учащиеся отвечают на эти вопросы по графикам, многие ошибаются — не могут правильно выделить нужные промежутки значений x. Таким образом, аналитическое решение с помощью неравенств помогает лучше читать графики.

122. б) Для того чтобы выражение $\sqrt{3a+2} - \sqrt{1-2a}$ имело смысл, необходимо одновременное выполнение условий $3a + 2 \geq 0$ и $1 - 2a \geq 0$.

Имеем $\begin{cases} 3a \geq -2 \\ -2a \geq -1 \end{cases}$, откуда $-\dfrac{2}{3} \leq a \leq \dfrac{1}{2}$.

1.5. Доказательство неравенств

Методический комментарий

В пункте вводится алгебраическая трактовка соотношений «больше» и «меньше», которая разъясняется наглядно, с опорой на координатную прямую, и рассматривается её применение для доказательства неравенств. Здесь же учащимся показывается, как алгебраически можно доказать изученные в главе свойства неравенств, которые ранее были обоснованы геометрически.

Доказательство неравенств — это довольно трудный для учащихся материал, поэтому в зависимости от уровня подготовки класса материал пункта можно рассматривать с разной степенью полноты. Так, по усмотрению учителя может быть опущен пример 6 из текста учебника, а также трудные задачи из раздела **Б** (**143—148**).

Особенностью задач на доказательство неравенств является то, что многие из них могут быть доказаны не единственным способом. Поэтому целесообразно показать учащимся различные методы доказательства неравенств, чтобы расширить их возможности для решения задач. При выполнении упражнений следует там, где это возможно, разбирать разные способы решения.

В пункте предлагается два основных пути доказательства неравенств:

1) на основе составления разности левой и правой частей неравенства и последующего сравнения этой разности с нулём;

2) переход от одного неравенства к другому, ему равносильному, на основе свойств неравенств.

Оба пути равноправны. Но нужно следить за аккуратностью записей в том и другом случае. Учащимся следует разъяснить, что если выбран первый путь решения, то после составления разности выполняется преобразование этого выражения, которое можно записывать в виде цепочки со знаком =. Полученное в итоге выражение сравнивается с нулём, и на основе этого делается заключение об исходном неравенстве. Если же выбран второй путь, то записывается последовательность равносильных неравенств (как при решении неравенства), и о последнем из них делается заключение — верно оно или нет. Вот как может, например, выглядеть оформление решения (упражнение **136**) в том и другом случае.

Докажем неравенство $a^2 + b^2 + 2 \geq 2\,(a + b)$.

Составим разность левой и правой частей неравенства: $a^2 + b^2 + 2 - 2\,(a + b) =$ $= a^2 + b^2 + 2 - 2a - 2b =$ $= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) =$ $= (a - 1)^2 + (b - 1)^2$. $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$, следовательно, неравенство доказано: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.	Перенесём $2(a + b)$ в левую часть неравенства: $a^2 + b^2 + 2 - 2(a + b) \geq 0$; $a^2 + b^2 + 2 - 2a - 2b \geq 0$; $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$; $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$ — верно, следовательно, верно и исходное неравенство: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.

Заметим, что Примерные программы по математике ПООП[1] не предусматривают вопрос о доказательстве неравенств. Поэтому соответствующие умения могут рассматриваться как результат усвоения темы, но не как итоговый результат обучения. В связи с этим задания на доказательство неравенств не включаются в экзамен; не следует включать их и в иные итоговые проверки.

[1] Примерная основная образовательная программа основного общего образования.

Комментарий к упражнениям

123—124. Упражнения направлены на усвоение теоретического материала пункта — алгебраической трактовки соотношений «больше», «меньше», а также «больше или равно» и «меньше или равно». Подобные задания полезно включать в устную работу.

125. В упражнение включены концовки, подобные встречающимся на заключительном этапе доказательства неравенств. Часто учащиеся допускают ошибки в определении знака выражений в пунктах «а»—«е» и ставят знак строгого неравенства, упуская из виду, что эти выражения могут обращаться в нуль. Поэтому целесообразно это упражнение (хотя бы частично) разобрать вместе. Полезно предложить учащимся прочитать полученное неравенство разными способами, напомнив, например, что оборот речи «больше или равно» означает «не меньше».

126. Здесь доказываются уже известные учащимся свойства неравенств (п. 1.2). В качестве образца можно взять доказательства, разобранные в учебнике (примеры 1 и 2).

127. Неравенства можно доказывать на основе составления разности левой и правой частей и сравнения её с нулём. Однако возможен иной путь рассуждения, аналогичный тому, который применён в примерах 4 и 5. Будем применять к неравенству известные правила, которые приводят к равносильному неравенству. Если в результате мы получим неравенство, верное при всех значениях переменной, значит, исходное неравенство было верным. Покажем эти два способа рассуждения на примере «е».

Способ 1. Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства:

$\dfrac{a}{a^2+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2a-a^2-1}{2(a^2+1)}=\dfrac{-(a-1)^2}{2(a^2+1)}$. Полученная разность меньше или равна нулю, а это означает, что при любом a верно неравенство $\dfrac{a}{a^2+1} \le \dfrac{1}{2}$.

Способ 2. $\dfrac{a}{a^2+1} \le \dfrac{1}{2}$.

Умножим обе части неравенства на положительное число $2(a^2 + 1)$. Получим $2a \le a^2 + 1$; $a^2 + 1 - 2a \ge 0$; $(a - 1)^2 \ge 0$. Последнее неравенство верно при всех значениях a, следовательно, и исходное неравенство верно при всех a.

128. Для сравнения дробей можно рассмотреть их разность и сравнить полученный результат с нулём. Можно также показать учащимся другой путь доказательства: по условию верно неравенство $a < b$; разделив обе части этого неравенства на произведение ab (по условию $ab > 0$), получим верное неравенство $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

129. Это неравенство часто используется для доказательства других неравенств. Поэтому это задание не следует пропускать, напротив, его нужно разобрать внимательно. Записав разность между левой и правой частями неравенства и выполнив преобразования, получим $\dfrac{(a-1)^2}{a}$. Так как $(a - 1)^2 \ge 0$ и $a > 0$, то полученная разность больше или равна нулю, т. е. для положительных a справедливо неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Сформулируем доказанное свойство: сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше двух.

Дополнительный вопрос. При каких значениях a выполняется равенство? (О т в е т: при $a = 1$.)

Целесообразно показать учащимся, что этот же факт можно записать иначе, используя две переменные, например x и y. Именно, если x и y — положительные числа, то верно неравенство $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Полезно продублировать доказательство и для этого случая, выяснив также, при каких x и y выполняется равенство (при $x = y$).

Имеет смысл предложить учащимся и в первом и во втором случаях привлечь числовые примеры, конкретизирующие эти неравенства.

130. Используем свойства неравенств.

1) Так как $x > 2$, то $x - 2 > 0$ и $2 - x < 0$. Так как $x > 2$, то $x > 1$, а поэтому $x - 1 > 0$ и $1 - x < 0$.

2) Используя полученные результаты, имеем

$x(2 - x) < 0$, $(x - 1)(x - 2) > 0$, $(2 - x)(x - 1) < 0$.

132. Рассуждения могут быть следующими:

а) Сумма двух сторон больше третьей, т. е. $a + b > c$, значит, разность $(a + b) - c > 0$;

б) $a - b - c = a - (b + c)$. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других, значит, $a - (b + c) < 0$, и, следовательно, исходное выражение отрицательно;

в) $a + c - b > 0$;

г) $c - (a + b) < 0$.

133. Пусть a, b, c — стороны треугольника, тогда $\frac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр. Сравним $\frac{a+b+c}{2}$ и a. Для этого рассмотрим разность: $\frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$. Так как в треугольнике $a < b + c$, то полученная разность больше нуля, следовательно, $\frac{a+b+c}{2} > a$.

Можно рассуждать так: надо доказать неравенство $\frac{a+b+c}{2} > a$. Умножим обе части неравенства на 2: $a + b + c > 2a$; $b + c - a > 0$; $b + c > a$ — верно, так как сумма двух сторон треугольника больше третьей. Следовательно, исходное равенство верно.

135. б) Рассмотрим разность $p^4 + q^4 - (p^3q + pq^3)$, преобразуем её:

$$p^4 + q^4 - (p^3q + pq^3) = p^3(p - q) + q^3(q - p) =$$
$$= (p - q)(p^3 - q^3) = (p - q)^2(p^2 + pq + q^2).$$

Так как $p > 0$, $q > 0$, то $pq > 0$, $p^2 + pq + q^2 > 0$, кроме того, $(p - q)^2 \geq 0$.

Произведение неотрицательного и положительного чисел неотрицательно, т. е. рассматриваемая разность больше или равна нулю. Следовательно, при $p > 0$, $q > 0$, $p^4 + q^4 \geq p^3q + pq^3$.

136. б) Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства и преобразуем её: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$. Сумма неотрицательных слагаемых неотрицательна, т. е. рассматриваемая разность неотрицательна и неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ верно при любых значениях a, b, c.

137. а) В первом способе доказательства покажем, что разность между левой и правой частями неравенства положительна. Во втором — воспользуемся неравенством, доказанным в примере 3: если a и b — положительные числа и $a > b$, то $a^2 > b^2$; а потом, почленно сложив неравенство $a^2 > b^2$ и неравенство $a > b$, получим требуемое.

138. Доказательство проводится по образцу разобранного в учебнике примера 3. Геометрическая иллюстрация показана на рисунке 1.10. Куб с большим ребром имеет больший объём, и наоборот: если объём куба больше, то и ребро его больше.

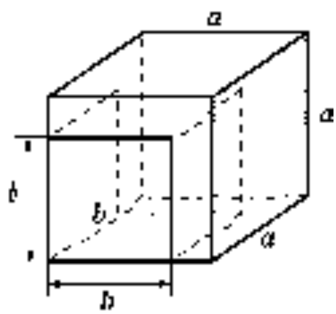

Рис. 1.10

139. Сначала докажем, что если a, b, c, d — положительные числа и $ad - bc \leq 0$, то $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

Рассмотрим разность $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. Преобразовав её, получим $\frac{ad - bc}{bd}$. Числитель дроби не больше нуля, знаменатель — положительное число, поэтому дробь, а значит, и рассматриваемая разность не больше нуля, т. е. $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

Теперь докажем обратное утверждение: если a, b, c, d — положительные числа и $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, то $ad - bc \leq 0$.

Умножив обе части неравенства $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ на bd ($bd > 0$), получим $ad < bc$, т. е. $ad - bc \leq 0$.

Сравним дроби $\frac{5}{18}$ и $\frac{6}{17}$. Так как $5 \cdot 17 < 6 \cdot 18$, то $\frac{5}{18} < \frac{6}{17}$. Можно предложить учащимся сформулировать в общем виде доказанное правило сравнения дробей.

140. Сначала рассмотрим разность $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}$. После преобразования получим $\frac{ad-cd}{b(b+d)} \le 0$, так как по условию $ad - bc \le 0$ и знаменатель дроби — положительное число. Следовательно, разность $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}$ не больше нуля, а поэтому $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$.

Аналогично, рассматривая разность $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}$, получим $\frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$.

Соединив два неравенства в одно, получим $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$.

141. а) Рассмотрим две разности $(0{,}17a + 0{,}83b) - a$ и $(0{,}17a + 0{,}83b) - b$. Выполнив преобразования, получим $0{,}83(b - a)$ и $0{,}17(a - b)$. Так как $a < b$, то из рассматриваемых разностей первая положительна, а вторая отрицательна. Значит, верно неравенство $0{,}17a + 0{,}83b > a$ и неравенство $0{,}17a + 0{,}83b < b$; соединив их в одно, получим доказываемое двойное неравенство.

142. д) Допустим, что $\sqrt{8} - \sqrt{2} < \sqrt{10} - \sqrt{3}$. С такого рода неравенствами удобно работать, перенеся члены с минусами из одной части в другую, т. е. сравнивать суммы, а не разности. А именно, $\sqrt{8} + \sqrt{3} < \sqrt{10} + \sqrt{2}$. Возведя в квадрат обе части неравенства, получим $11 + 2\sqrt{24} < 12 + 2\sqrt{20}$, или $2\sqrt{24} < 1 + 2\sqrt{20}$. Продолжив преобразования, получим верное неравенство $225 < 320$, и, следовательно, предположение верно. Таким образом, $\sqrt{8} - \sqrt{2} < \sqrt{10} - \sqrt{3}$.

ж) Допустим, что $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ или $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \sqrt{7} - \sqrt{5}$. Отсюда $2\sqrt{5} < \sqrt{7} + \sqrt{3}$, $(2\sqrt{5})^2 < (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$. Выполнив преобразование последнего неравенства, придём к неравенству $5 < \sqrt{21}$, что неверно, и, следовательно, предположение неверно. Таким образом, $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

143. а) *Способ 1.* Записав разность между левой и правой частями неравенства и выполнив преобразование, получим $\frac{(a-b)^2}{4}$. Так как $(a - b)^2 \ge 0$, то дробь больше или равна нулю при любых a и b. Таким образом, рассматриваемая разность не меньше нуля, и это означает, что данное неравенство доказано.

Способ 2. Возьмём данное неравенство в качестве исходного и избавимся от дробей. Получим $2(a^2 + b^2) \ge (a + b)^2$; $2a^2 + 2b^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$; далее используем свойства неравенств: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$; $(a - b)^2 \geq 0$; получили неравенство, верное при любых a и b. Таким образом, исходное неравенство было верным, значит, данное неравенство доказано.

Равенство выполняется при $a = b$.

б) Записав разность между левой и правой частями неравенства и выполнив преобразование, получим $\dfrac{3(a-b)^2(a+b)}{8}$. Так как $a > 0$, $b > 0$, то $a + b > 0$; $(a - b)^2 \geq 0$. Следовательно, дробь, а значит, и рассматриваемая разность не меньше нуля для любых положительных чисел a и b. Равенство выполняется при $a = b$.

Дополнительное задание. Сформулируйте словами доказанные свойства. В пункте «а» может быть, например, такая формулировка: «Квадрат среднего арифметического двух чисел меньше или равен среднему арифметическому квадратов этих чисел».

145. б) При доказательстве первым способом получим, что разность левой и правой частей неравенства равна $\dfrac{z(x-y)^2 + y(z-x)^2 + x(z-y)^2}{xyz}$. Это выражение при всех положительных значениях x, y, z больше или равно нулю, значит, неравенство доказано.

Для доказательства вторым способом преобразуем левую часть неравенства к виду

$$1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1,$$

а затем сгруппируем слагаемые и оценим выражение (используя неравенство, доказанное в упражнении **129**): каждое буквенное выражение, заключённое в скобки, не меньше 2, а значит, $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) + 3 \geq 2 + 2 + 2 + 3 = 9$.

147. а) Обозначим скорость туриста по горизонтальной дороге буквой x, а расстояние примем за 1. Задача сводится к сравнению выражений $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$.

Составив их разность и преобразовав её, получим, что $\dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}\right) < 0$, а это означает, что время движения по горизонтальной дороге меньше, чем по дороге с подъёмом и спуском.

148. а) Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Так как $\sqrt{x^2+1} > 0$, то можно воспользоваться неравенством, доказанным в упражнении **129**: $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$. Следовательно, $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

1.6. Что означают слова «с точностью до …»

Методический комментарий

В пункте вводятся понятия точности приближения и относительной погрешности. В результате изучения материала учащиеся должны понимать запись вида $a \pm h$, уметь читать её с использованием слов «с точностью до …», определять по такой записи промежуток, которому принадлежит точное значение величины. Они должны также уметь переходить от записи двойного неравенства, задающего промежуток, в котором находится точное значение величины, к записи приближённого значения в форме $a \pm h$.

Выполняя упражнение **150**, учащиеся учатся переходить от записи с помощью знака «±» к записи в виде двойного неравенства и обратно. Упражнения **151** и **152** посвящены содержательному усвоению понятия точности приближения. В ходе выполнения упражнения **153** учащиеся усваивают, как зависит от точности приближения запись приближённого значения величины в виде десятичной дроби.

Следует обратить внимание на упражнения **154—156**, в которых главным элементом задачи, включающей применение понятия точности приближения, является интерпретация полученного ответа. Задача **154** является подготовительной в этой цепочке, а другие две — это анализ реальных ситуаций. Главная идея решения задач **155—156**: если интервалы, в которых находятся значения сопоставляемых величин (например, процент опрашиваемых людей), пересекаются, то нельзя с уверенностью отдать предпочтение какой-либо из этих величин, если же не пересекаются — то с большой степенью вероятности можно.

Комментарий к упражнениям

150. Упражнение на отработку перехода от одной формы записи к другой. *Дополнительно* (для сильных учащихся) можно предложить доказать, что координату середины отрезка $a \leq x \leq b$ можно вычислить следующим образом: $x_0 = b - \frac{b-a}{2}$ или $x_0 = a + \frac{b-a}{2}$. При этом полезно попросить учащихся описать применяемый в каждом случае алгоритм. В первом случае находим длину отрезка $[a; b]$, затем находим половину этой длины и вычитаем её из координаты правого конца.

151. Направлено на усвоение нового словаря, введённого в пункте.

152. Нужно найти промежуток, в котором находится точное значение данного листа, схематически изобразить его на координатной прямой. И дальше становится понятно: если указанное значение попадает в полученный промежуток, то может, если нет, то не может.

153. г) Последним разрядом в записи числа 0,8430 является разряд десятитысячных, а это значит, что приближённое значение длины указано с точностью до 0,0001; $l = 0{,}8430 \pm 0{,}0001$ м и $0{,}8429 \leq l \leq 0{,}8431$.

Упражнения **154—156** составляют цепочку упражнений. Первое — подготовительное, два последних — на применение полученных знаний в практических ситуациях.

154. б) Можно переписать каждый из данных промежутков в виде двойного неравенства: $11{,}8 \leq a \leq 12{,}8$ и $12{,}5 \leq b \leq 12{,}7$, а можно — в виде промежутка: [11,8; 12,8] и [12,5; 12,7]; отсюда видно, что данные промежутки имеют общую часть — [12,5; 12,7]. В случае затруднений можно воспользоваться координатной прямой.

157. б) Данное число можно переписать в виде $(1{,}27 \pm 0{,}01) \cdot 10^7$. Это означает, что $S = 1{,}27 \cdot 10^7 \pm 10^5$ км^2, т. е. данные в справочнике приведены с точностью до 10^5 км^2.

158. В результате измерения штангенциркулем получили $l = 2{,}5 \pm 0{,}1$ мм, т. е. $2{,}4 \leq l \leq 2{,}6$. Определим относительную погрешность измерения: $\frac{0{,}1}{2{,}5} = 0{,}04$ — это 4%. В результате измерения микрометром получили $l = 2{,}48 \pm 0{,}01$ мм, т. е. $2{,}47 \leq l \leq 2{,}49$. Определим относительную погрешность измерения: $\frac{0{,}01}{2{,}48} = 0{,}004$ — это 0,4%.

159. Определим относительную погрешность прежнего изготовления детали: $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$ — это 2%. Теперь относительная погрешность изготовления детали составляет 1%. Найдём соответствующую точность приближённого значения диаметра изготовляемой пластины. Обозначив точность буквой x, получим $\frac{x}{5} = 0{,}01$, $x = 0{,}05$, откуда $d = 5 \pm 0{,}05$ см, или $4{,}95 \leq d \leq 5{,}05$.

1.7. Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

В содержании пункта выделяется три основных момента: учащимся показывают, что рациональное число можно представить периодической десятичной дробью (и обратно), что иррациональное число можно представить непериодической десятичной дробью, и, кроме того, их знакомят с одним из приёмов обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Весь материал излагается на основе рассмотрения конкретных числовых примеров.

Изложение вполне доступно для самостоятельного изучения. Необходимо только порекомендовать школьникам проделывать на бумаге вслед за текстом учебника все выкладки, представленные в нём. Понятно, что учащиеся могут изучать и не весь материал. В этом случае можно предложить опустить упражнения **161**—**163**, связанные с представлением периодических дробей в виде обыкновенных. Однако познакомиться с этим вопросом на уровне текста учебника всё же целесообразно.

Комментарий к упражнениям

160. Будем записывать дроби с наименьшим периодом.

в) Дробь $\frac{7}{13}$ можно представить в виде 0,(538461).

164. е) Пусть $a = 0{,}31(4)$, тогда

$$100a = 31{,}(4),$$
$$1000a = 314{,}(4).$$

Имеем $1000a - 100a = 314{,}(4) - 31{,}(4)$, отсюда

$$900a = 283,$$
$$a = \frac{283}{900}.$$

169. Если число представлено периодической дробью, то оно рационально. Следовательно, сумма двух периодических дробей представляет собой сумму двух рациональных чисел. Известно, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное (упражнение **25**), т. е. не может оказаться непериодической дробью.

170—171. В ответе используются математические факты, рассмотренные в упражнении **27**.

<u>1.8. Ещё о средних</u>
<u>(*Узнайте больше*)</u>

Методический комментарий

Учащиеся уже изучали среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел, а также доказывали соотношение между ними (п. 1.5, пример 5). Здесь на основе текстовой задачи на нахождение средней скорости движения вводится понятие среднего гармонического двух положительных чисел и рассматривается также понятие среднего квадратичного.

В ходе решения упражнений учащиеся могут доказать цепочку неравенств, связывающую все эти средние:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Комментарий к упражнениям

172—173. Доказательство неравенств проводится по образцу, приведённому в комментарии к упражнению **143**.

174. Ход решения задачи аналогичен рассмотренному в учебнике. Введя подобные обозначения, получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1v_2v_3}{v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2}; \; v_{\text{ср}} \approx 167 \text{ км/ч}.$$

175. Рассмотрим трапецию с основаниями a и b, в которой проведён отрезок c, параллельный основаниям и делящий трапецию на две трапеции, подобные между собой. Из подобия трапеций следует, что $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$.

Значит, $c^2 = ab$. Отсюда $c = \sqrt{ab}$.

176. Рассмотрим трапецию с основаниями a и b, в которой проведён отрезок m, параллельный основаниям и делящий трапецию на две трапеции равной площади. Продолжив боковые стороны трапеции до пересечения, получим три треугольника. Площадь треугольника с основанием a обозначим S_a, с основанием m обозначим S_m, с основанием b обозначим S_b.

По условию $S_m - S_a = S_b - S_m$, а из подобия треугольников следует, что: 1) $\frac{S_a}{S_m} = \frac{a^2}{m^2}$, откуда $S_a = \frac{S_m a^2}{m^2}$; 2) $\frac{S_m}{S_b} = \frac{m^2}{b^2}$, откуда $S_b = \frac{S_m b^2}{m^2}$. Подставив в первое равенство полученные выражения и выполнив преобразования в левой и правой частях равенства, имеем

$$\frac{S_m(m^2 - a^2)}{m^2} = \frac{S_m(b^2 - m^2)}{m^2}.$$

Значит, $m^2 - a^2 = b^2 - m^2$. Отсюда $m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Дополнительные задания

Комментарий к упражнениям

178. Число a меньше $\frac{1}{a}$, a^2 меньше a, следовательно, $a^2 < a < \frac{1}{a}$.

179. г) В результате преобразования данного выражения получим иррациональное число $2\sqrt{3} - 3$.

181. Необходимо подчеркнуть, что уравнений может быть составлено сколько угодно. Составим сначала простое исходное уравнение, из которого можно конструировать другие.

а) $x^2 - 12 = 0$.

б) Возведя обе части равенства $x = 2 + \sqrt{3}$ в квадрат, получим $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$. Чтобы избавиться от радикала, возведём ещё раз части равенства в квадрат, предварительно «уединив» радикал: $x^2 - 7 = 4\sqrt{3}$, $x^4 - 14x^2 + 49 = 48$, $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$.

в) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

182. а) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = -(1 - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{4}) - (\sqrt{4} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1 \approx 1{,}236$.

О т в е т: между 1 и 2.

183. б) Представим подкоренное выражение в виде квадрата двучлена. Получим $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 - 2\cdot3\cdot\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3 - \sqrt{2}$.

е) $\sqrt{4\sqrt{5}+9} + \sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{4+2\cdot2\cdot\sqrt{5}+5} + \sqrt{7-2\cdot2\cdot\sqrt{7}+4} = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{7} - 2 = \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

187. а) Покажем множество значений x на координатной прямой (рис. 1.11).

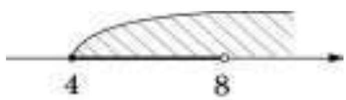

Рис. 1.11

О т в е т: при $x \in [4; 8) \cup (8; +\infty)$.

190. а) Выполнив преобразования системы неравенств

$$\begin{cases} x\sqrt{2} < \frac{\sqrt{18}}{2} \\ 1 - \frac{4-3x}{5} > 0, \end{cases}$$

получим $\begin{cases} 2x < 3 \\ 5 - 4 + 3x > 0, \end{cases}$ откуда $-\frac{1}{3} < x < 1\frac{1}{2}$ (рис. 1.12).

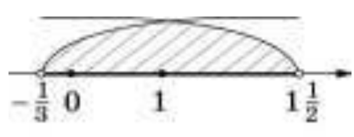

Рис. 1.12

О т в е т: 2 целых решения.

Глава 2. Квадратичная функция (19 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
2.1. Какую функцию называют квадратичной	3	О-7, О-8, П-18	41—47
2.2. График и свойства функции $y = ax^2$ 2.3. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	6	О-9, П-19 О-10, О-11, О-12, П-20	48—53 54—70
2.4. График функции $y = ax^2 + bx + c$ 2.5. Квадратные неравенства 2.6 . Метод интервалов	8	О-13, П-21 О-14, П-22	71—77 78—87
Обзор и контроль	2	«*Проверь себя*»	

<u>Основные цели:</u> познакомить учащихся с квадратичной функцией как с математической моделью, описывающей многие зависимости между реальными величинами; научить строить график квадратичной функции и читать по графику её свойства; сформировать умение использовать графические представления для решения квадратных неравенств.

<u>Обзор главы.</u> Изучение темы начинается с общего знакомства с функцией $y = ax^2 + bx + c$: с помощью готового чертежа выявляются основные особенности её графика; в небольшом историческом экскурсе раскрывается геометрическое «происхождение» параболы и приводятся примеры использования её свойств в технике. Этот вводный фрагмент, сопровождаемый серией разнообразных заданий, делает дальнейшее изучение материала более осознанным и целенаправленным.

Далее изложение материала осуществляется в следующей последовательности. Сначала рассматриваются свойства и график функции $y = ax^2$. Затем изучается вопрос о графиках функций $y = ax^2 + q$, $y = a(x + p)^2$, $y = a(x + p)^2 + q$, которые получаются с помощью сдвига вдоль осей координат стандартной параболы $y = ax^2$. (Полученные знания используются учащимися при построении ряда других графиков, таких, как $y = |x| - 2$, $y = \sqrt{x+4}$, $y = (x - 2)^3$ и т. д.) Наконец, доказывается теорема о том, что график любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть получен путем сдвигов вдоль координатных осей параболы $y = ax^2$. Теперь учащиеся по коэффициентам квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ могут представить общий вид соответствующей параболы и вычислить координаты её вершины.

В системе упражнений значительное место отводится задачам прикладного характера. Завершается тема рассмотрением вопроса о решении квадратных неравенств; используемый при этом приём основан на графических соображениях.

Основные виды деятельности. Распознавать квадратичную функцию, приводить примеры квадратичных зависимостей из реальной жизни, физики, геометрии.

Выявлять путём наблюдений и обобщать особенности графика квадратичной функции. Строить и изображать схематически графики квадратичных функций; выявлять свойства квадратичных функций по их графикам. Строить более сложные графики на основе графиков всех изученных функций.

Проводить разнообразные исследования, связанные с квадратичной функцией и её графиком.

Выполнять знаково-символические действия с использованием функциональной символики; строить речевые конструкции с использованием функциональной терминологии.

Решать квадратные неравенства, а также неравенства, сводящиеся к ним, путём несложных преобразований; решать системы неравенств, в которых одно неравенство или оба являются квадратными. Применять аппарат неравенств при решении различных задач.

Комментарий к использованию ЭИ. Работа с ЭИ позволяет усилить наглядность и использование эмпирических подходов при формировании обобщённых функционально-графических представлений и представлений о свойствах квадратичной функции.

Пункты 4.4 и 4.6 ЭИ посвящены изучению функций $y = ax^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ соответственно. Рекомендуется каждый раз использовать компьютер для получения общих представлений о графике, о его расположении в координатной плоскости. Учащиеся на основе наблюдений могут сделать и некоторые выводы, которые потом можно будет обосновать. Например: график функции $y = ax^2$ при $a > 0$ располагается выше оси абсцисс, а при $a < 0$ располагается ниже оси абсцисс; вершина параболы находится в начале координат.

Пункт 4.5 ЭИ посвящён рассмотрению сдвигов параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Однако целесообразно по ходу занятий использовать этот материал для формирования обобщённых представлений, рассматривая сдвиги графиков и других функций (программа даёт такую возможность).

Учебник		ЭИ		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
2. Квадратичная функция	2.1. Какую функцию называют квадратичной	Алгебра, 7—9	4. Функции	4.1. График функции и её свойства
	2.2. График и свойства функции $y = ax^2$			4.4. Функция $y = ax^2$ и её график
	2.3. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат			4.5. Сдвиги графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат
	2.4. График функции $y = ax^2 + bx + c$			4.6. График функции $y = ax^2 + bx + c$ и её свойства

2.1. Какую функцию называют квадратичной

Методический комментарий

Изучение этого пункта преследует две цели:

1) создание первоначальных представлений о графике квадратичной функции, знакомство с параболой как с геометрической фигурой;

2) повторение некоторых общих сведений о функциях, известных учащимся из курса 8 класса.

Этот пункт очень важен для дальнейшего осознанного изучения материала. При работе с теоретическим материалом и выполнении заданий учащиеся должны будут проводить наблюдения, выдвигать предположения, рассуждать, доказывать, переходить от одной системы терминов к другой, строить графики и т. д.

Теоретический текст пункта советуем разбить на несколько фрагментов и завершить рассмотрение каждого из них соответствующими упражнениями.

Вначале даётся определение квадратичной функции и приводятся примеры зависимостей из геометрии и физики, относящихся к функциям этого вида. Для проверки усвоения определения предназначено упражнение **195**.

Далее формируется общее представление о графике квадратичной функции. На рисунке 2.2 учебника в одной системе координат построено несколько графиков функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Нужно обсудить с учащимися, что общего у этих графиков и чем они различаются. К этому фрагменту теории примыкают упражнения **196—198**: первые два содержат вопросы по рисунку 2.2; при выполнении упражнения **198** учащиеся должны будут строить параболу, учитывая её симметричность.

В следующем фрагменте рассматривается пример построения по точкам графика квадратичной функции. Здесь же вводится понятие области значений функций. Обратите внимание: сначала рассуждения проводятся с использованием геометрической терминологии и с опорой на график, а затем те же самые факты формулируются на алгебраическом языке. Таким образом, формирование таких понятий, как «наименьшее (или наибольшее) значение квадратичной функции», «неограниченность (сверху или снизу)», происходит с опорой на наглядные представления. К этому фрагменту теории относятся упражнения **199** и **200**, дублирующие пример, разобранный в тексте.

Далее рассматривается график квадратичной функции, описывающей реальный процесс, а в упражнении **201** дана серия вопросов, на которые в подобных случаях должны отвечать учащиеся.

Теоретическая часть пункта завершается разговором об особенностях параболических зеркал. Этот материал можно предложить учащимся для самостоятельного чтения.

Дадим краткую характеристику остальных упражнений к пункту. Назначение упражнений **202**—**205** — восстановление навыка использования функциональной символики, а также приёмов нахождения значения y по заданному значению x (и наоборот) с использованием формулы и графика. При выполнении упражнений **206**—**208** учащиеся вспомнят термин «нуль функции», а также геометрический эквивалент высказывания «точка $x = a$ является нулём функции $y = f(x)$». Цель упражнений **209**—**212** состоит в овладении одним из алгоритмов построения графика квадратичной функции, идея которого такова: имея пару симметричных точек параболы, можно построить её ось симметрии и найти координаты вершины. Наконец, упражнение **213** — это задача-исследование, в основе которой известный факт: из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем выполнить все задания из раздела **А**, а также упражнения **209—210** из раздела **Б**.

Комментарий к упражнениям

195. *Дополнительный вопрос*. Для каждой квадратичной функции укажите коэффициенты a, b и c соответствующего квадратного трёхчлена.

197. Нужно подчеркнуть, что симметричные точки параболы лежат на одной и той же горизонтали и соответственно имеют одинаковые ординаты.

202. 3) Для ответа на вопрос достаточно найти дискриминант квадратного уравнения $2x^2 - x + 5 = 0$.

204. 1) $g(-1) = -3$ — неверное утверждение; 2) $g(0) = -5$ — верное утверждение; 3) $g(0) = g(2)$ — верное утверждение; 4) $g(3) > g(4)$ — верное утверждение.

После выполнения упражнения полезно продемонстрировать ученикам график функции $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$ и наглядно подтвердить правильность выводов, полученных путём вычислений.

205. 2) Учащиеся должны сформулировать общее утверждение: если точка графика расположена выше оси x, то $g(x) > 0$; если точка лежит ниже оси x, то $g(x) < 0$.

207. а) Нули функции найдём, решив уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$. Получим $x = 2$ и $x = 5$. Значит, график функции $f(x) = x^2 - 7x + 10$ пересекает ось x в точках (2; 0) и (5; 0). Этот график — парабола, и она может быть расположена в координатной плоскости так, как показано на рисунке 2.1 или 2.2.

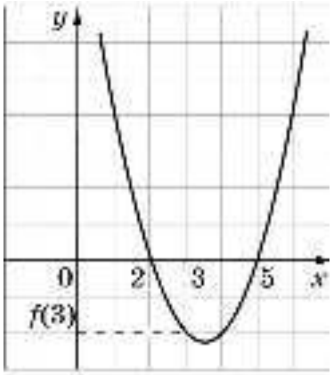

Рис. 2.1

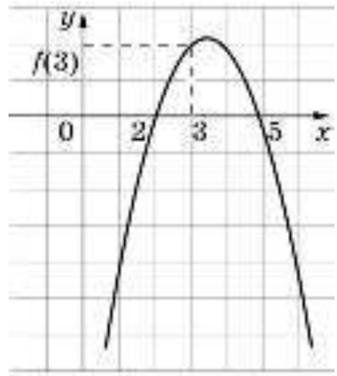

Рис. 2.2

Учащимся ещё неизвестна зависимость направления ветвей параболы от знака первого коэффициента квадратного трёхчлена, поэтому и ответ о расположении графика пока может быть неоднозначным. Такое решение задачи можно считать правильным и ограничиться им на данном этапе изучения темы.

Но с сильными учениками обсуждение вопроса целесообразно продолжить. Быть может, кто-то из них, рассматривая рисунок 2.2 учебника и строя графики по точкам, обратит внимание на то, что при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, и теперь захочет воспользоваться этим фактом. Нужно сказать, что это верное соображение. Однако пока вывод получен на отдельных примерах и нуждается в доказательстве.

В то же время уточнить положение параболы несложно. Вычислим, например, $f(3)$. Так как $f(3) = –2$, то значение трёхчлена «между корнями» отрицательно. Значит, график расположен так, как показано на рисунке 2.1.

б) Функция нулей не имеет, поэтому парабола не может иметь общих точек с осью x, т. е. она целиком расположена или выше оси x, или ниже её. Ответ можно уточнить, вычислив значение данного трёхчлена в какой-либо точке. Например, $f(0) = –7 < 0$, значит, график целиком расположен ниже оси x.

208. а) Можно убедиться подстановкой, что при $x = –4$ и $x = 3$ значение трёхчлена $x^2 + x – 12$ равно нулю, а можно решить уравнение $x^2 + x – 12 = 0$.

б) Достаточно показать, что дискриминант трёхчлена $2x^2 + 3x + 4$ отрицателен.

211. Самый простой ответ: $y = (x + 1)(x – 3)$.

График можно строить, пользуясь планом, предложенным в упражнении **209** (учитывая, конечно, что координаты точек его пересечения с осью x уже известны).

212. а) График функции $y = x^2 + 4x + 7$ пересекает ось y в точке (0; 7). Симметричная ей точка графика лежит с данной точкой на одной и той же горизонтальной прямой, т. е. также имеет ординату, равную 7. Найдём её абсциссу. Для этого решим уравнение $x^2 + 4x + 7 = 7$, т. е. $x^2 + 4x = 0$. Получим $x_1 = 0$, $x_2 = –4$. Значит, точке параболы (0; 7) симметрична точка (–4; 7).

Далее строим график по плану, предложенному в упражнении **209**, начиная с пункта 2. Первый пункт пришлось заменить, так как данный график не пересекает ось x.

213. Задача трудная. При желании её можно перенести в конец главы. Но в любом случае решение целесообразно начинать так: начертить несколько прямоугольников с данным периметром и вычислить их площади.

1) Если длина одной стороны прямоугольника равна x, то длина второй равна $10 - x$. Тогда $S(x) = x\,(10 - x)$, т. е. $S(x) = -x^2 + 10x$.

2) Нули функции: $x = 0$ и $x = 10$. Координаты вершины: $x = 5$, $y = 25$.

Площадь не может быть отрицательной, поэтому вычерчиваем только ту часть параболы, которая расположена выше оси x (рис. 2.3).

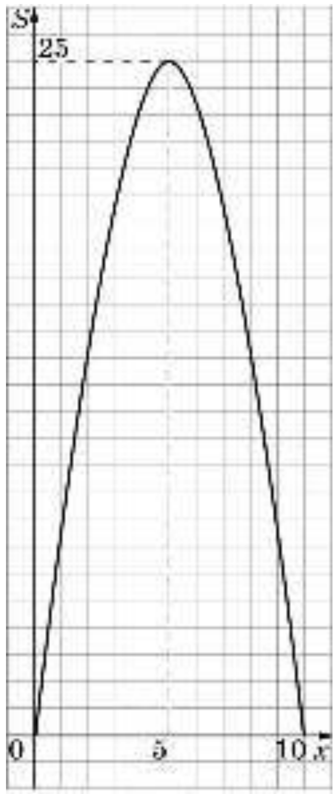

Рис. 2.3

3) $0 \le x \le 10$.

4) Если $x = 0$ и $x = 10$, то $y = 0$. При этих значениях x прямоугольник превращается в отрезок.

5) Ответ на вопрос дают координаты верхней точки параболы, т. е. её вершины. Площадь прямоугольника будет наибольшей при $x = 5$, т. е. в том случае, когда этот прямоугольник окажется квадратом.

2.2. График и свойства функции $y = ax^2$

Методический комментарий

В этом пункте, как и в предыдущем, ставятся две цели: знакомство с частным случаем квадратичной функции $y = ax^2$, а также развитие представлений об общих свойствах функций.

Обязательным результатом изучения данного пункта следует считать умение сформулировать утверждение о том, что представляет собой график функций $y = ax^2$ (соответствующая формулировка выделена цветом в учебнике), изобразить этот график схематически для $a > 0$ и $a < 0$ и построить его по точкам для конкретного значения a. Это опорные знания; свободное владение ими необходимо для усвоения материала следующего пункта. Хорошо успевающие школьники должны знать ещё и о симметрии графиков функций $y = ax^2$ относительно оси x при противоположных значениях a, и об изменении «крутизны» параболы при увеличении $|a|$.

Теоретическая часть пункта завершается рассмотрением свойств функции $y = ax^2$ для случая $a > 0$. Свойства «считываются» с графика. Фактически они получаются в результате перевода геометрических фактов на «язык функций». Это хорошо видно из таблицы в конце пункта. Желательно, чтобы свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$ были сформулированы при активном участии школьников в ходе фронтальной работы. Что касается свойств функции $y = ax^2$ при $a < 0$, то учащиеся могут сформулировать их самостоятельно.

Большая часть упражнений из раздела **А** — это задания на построение графиков функций вида $y = ax^2$. Каждое из них сопровождается серией вопросов, среди которых есть задания на определение принадлежности точки графику, наибольшего и наименьшего значения функции на заданном промежутке, на вычисление координат точек пересечения графика функции $y = ax^2$ с некоторой горизонтальной прямой, на определение промежутков возрастания и убывания функции и т. д. Полезным с точки зрения усвоения теоретических сведений является упражнение **221** на соотнесение формул и графиков. Кроме того, в разделе **А** есть упражнения на построение графиков кусочно-заданных функций, в которых «участвуют» функции вида $y = ax^2$. Напомним, что строить графики функций, заданных на разных промежутках разными формулами, учащимся приходилось и в 7, и в 8 классе.

Упражнения из раздела **Б** весьма разнообразны; они богаче в идейном отношении. В то же время в классах с невысоким уровнем подготовки достаточно упражнений из раздела **А**.

Комментарий к упражнениям

214. а) Наименьшее значение функции равно 0. Наибольшее значение равно 8; его функция принимает дважды — при $x = -2$ и при $x = 2$.

Дополнительный вопрос. Укажите наименьшее и наибольшее значение этой функции на промежутке $[-2; 1]$; $[-1; 3]$.

219. а) Графику не принадлежит точка A с положительной ординатой, так как при любом $x \neq 0$ значение функции $f(x) = -2{,}6x^2$ будет отрицательным.

223. Учащиеся допускают меньше ошибок, если действуют следующим образом: сначала строят график первой функции на её естественной области определения, вычерчивая его тонкой линией, и потом обводят жирно ту его часть, которая соответствует указанному промежутку; затем точно так же тонкой линией вычерчивают график второй функции и жирно обводят нужную его часть.

224. Если задание вызывает затруднения, можно предложить построить точку $C(-6; -9)$ в координатной плоскости, затем схематически изобразить параболу $y = ax^2$, проходящую через эту точку, показать точку параболы, симметричную точке C, проведя соответствующую горизонталь.

1) $x = 6$, $y = -9$.

2) Подставив в формулу $y = ax^2$ значения $x = -6$ и $y = -9$, получим уравнение с переменной a: $-9 = a \cdot (-6)^2$. Отсюда $a = -\frac{1}{4}$. Значит, функция задана формулой $y = -\frac{1}{4}x^2$.

226. а) Требование задачи нужно перевести на алгебраический язык. Так, если точка должна быть расположена выше прямой $y = 1000$, то это означает, что должно выполняться неравенство $y > 1000$.

Задачу можно решить простым подбором; составление и решение неравенств здесь не предполагается.

227. а) Зависимость длины окружности l от радиуса r приближённо выражается формулой $l = 6r$, где $r \geq 0$. Это линейная зависимость; её график — луч, расположенный в I координатной четверти, с началом в точке $O(0; 0)$.

б) Зависимость площади круга S от радиуса r приближённо выражается формулой $S = 3r^2$, где $r \geq 0$. Графиком зависимости служит правая ветвь параболы, включающая точку $O(0; 0)$.

228. а) График изображён на рисунке 2.4. Функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

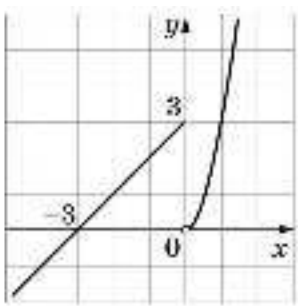

Рис. 2.4

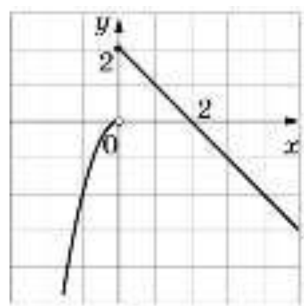

Рис. 2.5

б) График изображён на рисунке 2.5. Наибольшее значение функции равно 2; наименьшего значения нет.

230. Идея упражнения состоит в том, чтобы учащиеся самостоятельно обобщили знания о симметрии графиков таких функций, как, например, $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$, и применили их в новой ситуации. В каждом случае следует построить график первой функции и с помощью симметрии относительно оси x получить график второй функции. Можно сформулировать и записать общее утверждение: графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси x. В самом деле, при любом x из области определения функций их значения — противоположные числа. Значит, каждой точке графика функции $y = f(x)$ соответствует симметричная ей относительно оси x точка графика $y = -f(x)$ и наоборот.

232. В основу этой задачи положено определение параболы как геометрического места точек, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки и от данной прямой, не проходящей через эту точку. Это определение эквивалентно тому, которое (в неявном виде) используется в школьном курсе: парабола — это линия, которая является графиком уравнения $y = ax^2$.

3) Возьмём, например, на параболе точку $M(4;\ 4)$ (рис. 2.6). Расстояние от точки M до точки F равно длине отрезка FM. Этот отрезок — гипотенуза прямоугольного треугольника FMN. Длина катета FN равна абсциссе точки M, значит, $FN = 4$. Длина катета MN на единицу меньше ординаты точки M, значит, $MN = 3$. По теореме Пифагора $FM = \sqrt{16+9} = 5$.

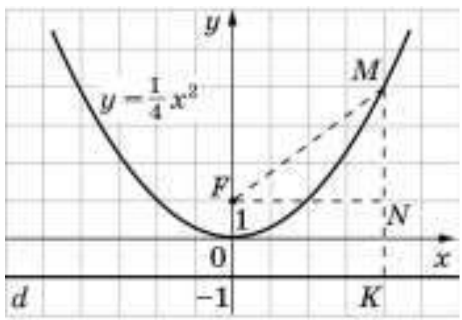

Рис. 2.6

Расстояние от точки M до прямой d равно длине отрезка MK. Она на единицу больше ординаты точки M, т. е. $MK = 5$.

Таким образом, $FM = MK$, т. е. точка M находится на одинаковом расстоянии от точки F и от прямой d.

Понятно, что таким же свойством обладает точка параболы $(-4;\ 4)$, симметричная точке $M\ (4;\ 4)$. Совсем легко убедиться, что таким же свойством обладают точки параболы $(2;\ 1)$ и $(-2;\ 1)$. Полезно проверить, что это справедливо и для точек $(6;\ 9)$ и $(-6;\ 9)$.

4) Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка параболы $y = \frac{1}{4}x^2$. Найдём длины отрезков FM и MK.

В треугольнике FMN $FN = x$, $MN = y - 1$, т. е. $MN = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Значит,

$$FM = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

Далее: $MK = y + 1$, т. е. $MK = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Таким образом, $FM = MK$. Утверждение доказано.

Можно добавить, что точка $F(0;\ 1)$ — это *фокус* параболы $y = \frac{1}{4}x^2$, а прямая d, задаваемая уравнением $y = -1$, — её *директриса* (направляющая). Если представить, что по параболе движется точка, то расстояния от неё до точки F и прямой d будут меняться, но они всегда будут оставаться равными между собой.

2.3. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

Методический комментарий

Основной результат изучения этого пункта заключается в следующем: учащиеся должны знать, с помощью каких сдвигов вдоль координатных осей из графика функции $y = ax^2$ можно получить параболу, задаваемую уравнением $y = ax^2 + q$ или $y = a(x + p)^2$, уметь в конкретных случаях построить эти параболы или изобразить их схематически (отметив вершину, проведя ось симметрии, показав направление ветвей). Что касается соответствующих формулировок, выделенных цветом в учебнике, то нет необходимости требовать их запоминания от всех учащихся. Понимание сути вопроса лучше проверить при выполнении упражнений.

Так, на вопрос о том, как, используя график функции $y = -2x^2$, можно получить график функции $y = -2x^2 + 4$, возможен такой ответ: график функции $y = -2x^2 + 4$ — это парабола; она получается сдвигом параболы $y = -2x^2$ на 4 единицы вверх, поэтому её вершина имеет координаты (0; 4); как и у параболы $y = -2x^2$ её осью симметрии является ось y и её ветви также направлены вниз.

Знание указанных фактов важно для осознанного и активного восприятия учащимися излагаемого далее теоретического материала. В то же время оно, безусловно, имеет и самостоятельную практическую ценность. Желательно, чтобы и после знакомства с общим приёмом построения графика квадратичной функции (см. п. 2.4) учащиеся узнавали в формулах типа $y = -2x^2 + 3$, $y = 2(x + 2)^2$, $y = 2x^2 - 4x + 2$ «особые случаи» и использовали для построения графиков изученные в данном пункте специальные приёмы.

В пункте рассматривается приём построения графика функции, заданной формулой вида $y = a(x + p)^2 + q$, а также разъясняется принципиальная возможность построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ путём выделения из трёхчлена квадрата двучлена. Таким образом, учащиеся теперь знакомы уже с двумя приёмами построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$. (Первый приём описан в упражнениях **209** и **212**.) Их основное различие состоит в способе нахождения координат «главной» точки параболы — её вершины.

Большая часть упражнений из раздела **А** (**233—248**) относится к функциям вида $y = ax^2 + q$ и $y = a(x + p)^2$. Данные упражнения нацелены не только на отработку навыков построения графиков, но и на умение распознавать тип формулы, а также использовать графические соображения для исследования свойств функций (например, упражнения **240** и **241**). Кроме того, в разделе **А** есть упражнения на построение графиков функций вида $y = a(x + p)^2 + q$ (упражнение **250**) и $y = ax^2 + bx + c$ (упражнение **251**). Увеличивать их количество нецелесообразно, отработка соответствующих умений здесь не предполагается (более того, с основной массой учащихся это вряд ли возможно).

В упражнениях из раздела **Б** легко проследить те же идеи, что и в заданиях к предыдущим пунктам: это задачи с параметром (упражнения **252**, **254**, **255**; заметим, что в заданиях **252** и **254** параметр присутствует «неявно»); задачи, предполагающие перенос приёмов построения графиков с помощью сдвигов вдоль осей на функции других видов (упражнения **259** и **260**) и построение графиков кусочно-заданных функций
(упражнение **261**). Надо обратить внимание на упражнение **262** (задача-исследование). В результате её решения учащиеся знакомятся с понятием четной функции и свойством графика четной функции. В сильном классе можно дать логическое завершение проведенного исследования, познакомив учащихся с понятием нечетной функции (см. комментарий к упражнению **262**).

В классах с невысоким уровнем подготовки советуем ограничиться заданиями из раздела **А** и, может быть, отказаться от упражнений **250** и **251**.

Комментарий к упражнениям

235. *Дополнительное задание.* Изобразите график функции схематически (отметьте вершину, покажите направление ветвей).

236—237. Полезно вначале изобразить график схематически. (В дальнейшем учащиеся будут делать это мысленно. Это очень важное умение, «организующее» деятельность по построению графика и предупреждающее ошибки.)

240. Выполняется с опорой на схематический график.

Дополнительное задание. Не используя графические соображения, докажите, что функция $y = 0{,}5x^2 + 4$ принимает только положительные значения, а функция $y = –3x^2 – 1$ — только отрицательные.

245. Учащиеся часто ошибаются в определении направления сдвига; например, для параболы $y = (x^2 + 1)^2$ указывают в качестве вершины точку (1; 0). Полезно приучить их для самоконтроля подставлять в заданную формулу абсциссу вершины; если в результате получается ноль, то вершина определена верно.

Дополнительное задание. Изобразите график схематически.

254. Так как новая парабола получена в результате сдвига вдоль оси x параболы $y = x^2$, то она может быть задана формулой вида $y = (x + p)^2$. Подставив в эту формулу координаты точки M и решив получившееся уравнение, найдём значение p. В каждом случае задача имеет два решения. Результат полезно подтвердить наглядно, построив соответствующие графики.

а) $4 = (0 + p)^2$, т. е. $p^2 = 4$. Отсюда $p = \pm 2$. Получили две формулы: $y = (x + 2)^2$ и $y = (x - 2)^2$. Исходная парабола и две новые, проходящие через точку M, изображены на рисунке 2.7.

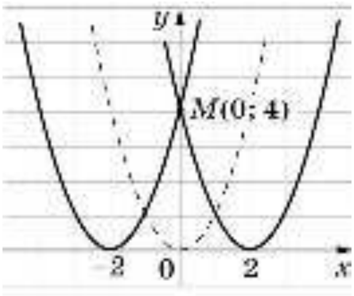

Рис. 2.7

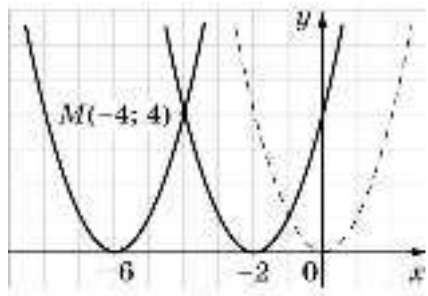

Рис. 2.8

б) $4 = (-4 + p)^2$, поэтому $(p - 4)^2 = 4$. Отсюда $p - 4 = 2$ или $p - 4 = -2$, т. е. $p = 6$ или $p = 2$. Имеем формулы: $y = (x + 6)^2$ и $y = (x + 2)^2$.

Задача имеет два решения. Результат проиллюстрирован на рисунке 2.8.

255. О т в е т: а) при $a < 0$; б) при $q \leq 0$.

259. Предполагается, что учащиеся увидят возможность построения графиков путём сдвига исходного графика вдоль осей координат.

261. б) График изображён на рисунке 2.9.

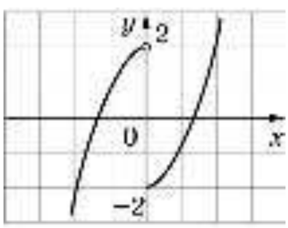

Рис. 2.9

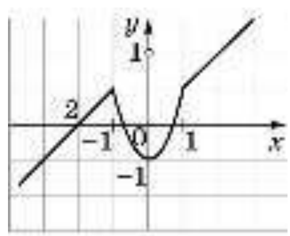

Рис. 2.10

в) График изображён на рисунке 2.10.

262. 1) Функция $y = x^2 + 1$ при противоположных значениях аргумента принимает равные значения.

2) Учащиеся, скорее всего, приведут в качестве примеров чётных функций такие функции, как $y = x^2$, $y = -2x^2$ и т. д. Возможно, если догадаются, укажут и функцию

$y = |x|$. Обязательно нужно дополнить этот список знакомыми им формулами, например такими: $y = x^4$, $y = x^4 - 9x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{x^2}{4+x^2}$.

3) График чётной функции симметричен относительно оси y. Полезно продемонстрировать учащимся заранее подготовленные учителем графики некоторых чётных функций. Можно для этого воспользоваться и рисунками из учебника. Так, на рисунке 3.3 (с. 153) под номером $\boxed{1}$ изображён график функции $y = \frac{1}{x^2+1}$, а на рисунке 3.6, *а* (с. 162) — график функции $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Можно познакомить учащихся с понятием нечётной функции. Ввести это понятие рекомендуем по тому же плану, по которому вводится в этом упражнении понятие чётности функции. Надо подчеркнуть, что нечётные функции также обладают свойством симметрии, но в отличие от чётных знак функции меняется при изменении знака аргумента: $f(-x) = -f(x)$, и график нечётной функции симметричен относительно начала координат. Завершить исследование можно упражнением такого рода:

«Какие из следующих функций являются чётными; нечётными; ни теми, ни другими: 1) $y = x$; 2) $y = x+3$; 3) $y = -3x$; 4) $y = |x|$; 5) $y = -x^2$; 6) $y = -x^2+4$; 7) $y = 2(x-1)^2$; 8) $y = x^3$; 9) $y = x^3+1$; 10) $y = \frac{2}{x}$».

2.4. График функции $y = ax^2 + bx + c$

Методический комментарий

Этот пункт завершает знакомство с квадратичной функцией. Здесь доказывается теорема о том, что график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить с помощью параллельных переносов параболы $y = ax^2$ вдоль осей координат. Идея доказательства учащимся знакома: задачу приведения квадратного трёхчлена к виду $a(x + p)^2 + q$ нужно решить применительно к буквенному выражению $ax^2 + bx + c$.

Основной практический результат изучения этого материала состоит в том, что теперь учащиеся знают удобный способ нахождения координат вершины параболы: их можно просто вычислить по формулам. Подчеркнём, что формулу $x = -\frac{b}{2a}$, по которой находится абсцисса вершины, учащиеся должны знать наизусть. В то же время формулу для вычисления ординаты вершины помнить необязательно; ординату можно найти, подставив вычисленную абсциссу в уравнение параболы.

В теоретической части пункта разобраны два примера, в которых даны образцы рассуждений. В первом рассматривается новый приём построения параболы и с опорой на график описываются свойства данной квадратичной функции. Во втором примере рассматривается задача физического содержания.

Упражнения из раздела **А** направлены прежде всего на формирование умения строить график функции $y = ax^2 + bx + c$ и читать по графику её свойства (задания **263**—**267**, **271**).

Обратите внимание на упражнение **265**, в нём содержится план построения графика. Собственно говоря, это тот же план, которым учащиеся пользовались раньше, но теперь они по-новому будут выполнять первый его пункт — нахождение координат вершины параболы. Можно посоветовать учащимся не делать ненужных вычислений при выполнении пункта 4: вычислив координаты какой-либо точки параболы и отметив её в координатной плоскости, можно сразу же построить симметричную ей точку, расположенную по другую сторону оси симметрии. Нужно также добиваться аккуратного вычерчивания параболы (они часто получаются у учащихся «угловатыми»). Обращаем внимание учителя и на то, что нахождение точек пересечения параболы с осью x не является обязательным требованием при её построении. В то же время желательно отмечать точку пересечения с осью y (а также симметричную ей точку).

В упражнениях из раздела **Б** большое место отводится задачам прикладного характера (упражнения **276**—**279**, **285**—**287**), которые чрезвычайно важны с точки зрения демонстрации применимости свойств квадратичной функции. Кроме того, как и в предыдущих пунктах, здесь есть задачи с параметром (упражнения **280**—**282**). Задача-исследование (упражнение **288**) интересна, но достаточно трудоёмка. Её можно разбить на три самостоятельные задачи и предложить их разным учащимся. Результаты можно будет обсудить в группах, в которые войдут ученики, выполнявшие одно и то же задание, а затем, после уточнения выводов, познакомить с ними остальных.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться упражнениями **263**—**266**, **269**, **271**—**273** из раздела **А** и упражнениями **275** (а, в), **280**, **284**, **286** из раздела **Б**.

Комментарий к упражнениям

266. При построении графиков можно пользоваться планом, предложенным в упражнении **265**; вычислять координаты точек пересечения параболы с осью x необходимости нет. Заметим, что во всех случаях парабола пересекает ось x в точках с целыми абсциссами, и эти точки будут получены «естественным путём» в ходе построения.

267. Все трёхчлены в этом упражнении имеют иррациональные корни, поэтому и нули функции с помощью графика придётся указывать приближённно. При аккуратном построении (может быть, даже на миллиметровой бумаге) можно ожидать такие ответы: а) отрицательный корень заключён между –0,5 и 0; положительный корень больше 2 и меньше 2,5; в) примерно 1,5 и 4,5.

268, 269. Это взаимосвязанные упражнения, нацеленные на обучение нахождению координат точек пересечения параболы с осью x и с осью y.

268. Не следует ограничиваться формальными вычислениями; полезна будет геометрическая интерпретация. Учащиеся должны понять, что буквой A обозначена точка пересечения графика с осью y, а буквами B и C — точки пересечения с осью x. В качестве *дополнительного задания* можно предложить показать положение этих точек в координатной плоскости и схематически изобразить параболу (в случаях *а*, *в* и *г*).

269. Задания 1 и 2 выполняются путём вычислений. В пункте «б» дана парабола, не пересекающая ось x, а в пункте «г» — парабола, касающаяся оси x.

270. В целом это комплексное задание, в котором задействованы все основные точки параболы. Учащиеся могут предложить разные решения. Например:

б) Найти абсциссу точки M по формуле $x = -\frac{b}{2a}$ или как середину отрезка с концами в точках O и N (в этом случае сначала нужно найти координаты точки N).

О т в е т: а) $A(-5; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 5)$;

б) $M(4; 4)$, $N(8; 0)$;

в) $P(-\sqrt{3}; 0)$, $N(\sqrt{3}; 0)$, $Q(0; 6)$;

г) $A(-2; 0)$, $D(6; 0)$, $B(0; -4)$, $C\left(2; -5\frac{1}{3}\right)$.

271. Упражнение полезно тем, что здесь встречаются разные случаи положения параболы в координатной плоскости.

б) График не пересекает ось x; он расположен ниже её. Значит, неотрицательные значения функция не принимает и при любом x выполняется неравенство $y < 0$.

г) Учащиеся должны узнать формулу вида $y = ax^2 + q$.

е) Данную формулу можно представить в виде $y = (x + 2)^2$. График — парабола, касающаяся оси x в точке $(-2; 0)$. Поэтому $y = 0$ при $x = -2$ и $y > 0$ при любом $x \neq -2$; отрицательных значений функция не принимает.

272. в) Парабола $y = 9 - x^2$ и прямая $y + x = 7$ пересекаются в точках $(2; 5)$ и $(-1; 8)$.

г) О т в е т: $(0; 0)$ и $(3; -3)$.

273. в) Можно начать со схематического рисунка. Он поможет дать правильный ответ и одновременно послужит своего рода обоснованием.

275. В правой части каждого уравнения записано произведение двух линейных множителей; иными словами, правая часть — это квадратный трёхчлен, разложенный на множители. Поэтому графиком каждой из заданных функций является парабола.

Очевидно, что для построения графиков нецелесообразно переходить к уравнению вида $y = ax^2 + bx + c$ и вычислять координаты вершины по формулам. Проще отметить точки пресечения параболы с осью x и найти абсциссу вершины как середину отрезка с концами в этих точках. Направление ветвей параболы легко уточнить, определив (устно) знак коэффициента при x^2.

276. 1) Подставив в формулу $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ значения $v_0 = 0$ и $h_0 = 20$ и считая $g = 9{,}8$, получим $h = -4{,}9t^2 + 20$.

2) График — часть параболы, задаваемой уравнением $h = -4{,}9t^2 + 20$, расположенная в I координатной четверти.

3) а) 2 с; б) во вторую секунду (за первую секунду мяч пролетел примерно 5 м, а за вторую — 15 м; на промежутке $[1; 2]$ график быстрее «идёт вниз»); в) приблизительно на расстоянии, равном 9 м.

277. В качестве образца можно воспользоваться примером 2 из текста учебника.

278. 1) Площадь большого круга равна 4π, а малого — πx^2, значит, $A = 4\pi - \pi x^2$. Заменив π числом 3, получим формулу $A = 12 - 3x^2$.

2) График изображён на рисунке 2.11.

3) $0 \le x \le 2$.

4) При $x = 0$ кольцо расширяется до большого круга, при $x = 2$ оно исчезает, превращаясь в окружность; при изменении x от 0 до 2 площадь A уменьшается от 12 до 0.

Рис. 2.11

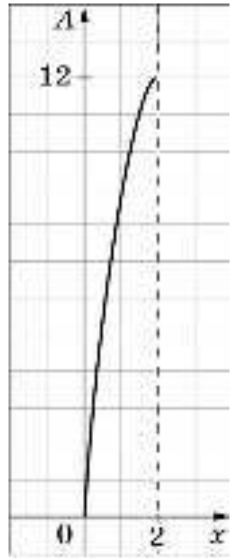

Рис. 2.12

279. 1) $A = 4\pi - \pi(2 - x)^2 = 4\pi x - \pi x^2$. Подставив вместо π число 3, получим формулу $A = 12x - 3x^2$.

2) График изображён на рисунке 2.12.

3) $0 \le x \le 2$.

4) При изменении x от 0 до 2 площадь A увеличивается от 0 до 12.

280. О т в е т: а) $c = 4$; б) $c = -3$; в) $a = 1$; г) $b = 2$.

Дополнительный вопрос к заданиям «а» и «б». Вычислите координаты точки, симметричной точке M.

281. Нужно воспользоваться формулой для вычисления абсциссы вершины параболы: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

282. а) Из равенства $-3 = -\dfrac{p}{2}$ найдём, что $p = 6$. Подставив в уравнение $y = x^2 + 6x + q$ координаты точки A, найдём, что $q = 13$.

283. Проведём рассуждения для параболы 2.

Ветви параболы направлены вверх, поэтому $a > 0$. Так как парабола пересекает ось y в точке, ордината которой отрицательна, то $c < 0$. Абсцисса вершины равна $-\dfrac{b}{2a}$.

Из рисунка видно, что эта абсцисса отрицательна. Так как $-\frac{b}{2a} < 0,$ то $\frac{b}{2a} > 0.$ Значит, $b > 0.$

284. а) Можно рассуждать, например, так: возьмём параболу $y = x^2$, сдвинем её на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх; новая парабола задаётся уравнением $y = (x - 2)^2 + 3$, т. е. $y = x^2 - 4x + 7$.

286. Если длина одной стороны прямоугольника равна x см, то длина другой стороны будет $8 - x$ см. Его площадь вычисляется по формуле $S = x(8 - x)$, т. е. $S = 8x - x^2$. Координаты вершины соответствующей параболы: $x = 4$, $y = 16$. Таким образом, функция принимает наибольшее значение, равное 16, при $x = 4$. Геометрическое истолкование этого ответа таково: из всех прямоугольников с периметром, равным 16, наибольшую площадь имеет прямоугольник с основанием, равным 4. Понятно, что этот прямоугольник является квадратом.

Полезно добавить, что справедливо и общее утверждение: из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

288. 1) Вершины всех парабол лежат на одной и той же вертикальной прямой ($x = 2$). При увеличении c парабола сдвигается вдоль этой вертикали вверх, а при уменьшении — вниз. (Все параболы «равны» между собой, так как коэффициент a один и тот же.)

2) При $b = 0$ имеем формулу $y = x^2 + 4$, т. е. параболу, симметричную относительно оси y; её вершина — точка (0; 4). С изменением b вершины парабол смещаются (однако все графики проходят через точку (0; 4)). Если b — число положительное, то с увеличением b вершина смещается влево и вниз; если b — число отрицательное, то с увеличением $|b|$ вершина смещается вправо и вниз. (Все параболы «равны» между собой, так как коэффициент при x^2 один и тот же.)

3) Так как предлагается провести наблюдение для положительных значений a, то и вывод будет сделан лишь для $a > 0$. При увеличении a меняется форма параболы; она становится «круче». Вершины парабол перемещаются вправо и вверх, оставаясь при этом левее оси y и ниже прямой $y = -5$.

2.5. Квадратные неравенства

Методический комментарий

Решение квадратных неравенств для многих учащихся традиционно является камнем преткновения. Поэтому здесь особенно важны простота и доступность алгоритма решения, свободное владение учащимися опорными знаниями, дифференцированный подход к школьникам при организации их учебной деятельности.

Обязательным результатом обучения является умение решать неравенство вида $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c > 0$ с опорой на схематический график квадратичной функции. Образцы рассуждений, возможные способы записи ответа приведены в примерах 1, 2 и 3.

Заметим, что учащиеся чаще допускают ошибки при решении квадратных неравенств с отрицательным первым коэффициентом. В учебнике предлагается в таких случаях заменять неравенство равносильным ему с положительным коэффициентом при x^2 (см. пример 3). Важно, чтобы ученики поняли, что об исходном неравенстве нужно «забыть»; для решения неравенств изображается парабола с ветвями, направленными вверх.

Конечно, можно рассуждать иначе. Решим ещё раз неравенство $-3x^2 + 2x - 1 < 0$, рассмотренное в примере 3. Выясним, пересекает ли график функции $y = -3x^2 + 2x - 1$ ось x. Для этого решим уравнение $-3x^2 + 2x - 1 = 0$, т. е. $3x^2 - 2x + 1 = 0$. Так как $D = -8 < 0$, то уравнение корней не имеет. Это означает, что график функции $y = -3x^2 + 2x - 1$ целиком расположен ниже оси x и неравенство $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ выполняется при любых x. Может быть, есть смысл показать ученикам оба способа решения, сопоставить их и разрешить пользоваться любым.

Заметим, что иногда учителя вместо приёма, рассмотренного в учебнике, используют так называемый метод интервалов. Это вряд ли целесообразно: ведь метод интервалов не применим, например, к неравенству, рассмотренному выше, т. е. для квадратных неравенств он не является общим приёмом.

Умение решать квадратные неравенства отрабатывается на упражнениях **290—293**. Среди них встречаются такие «особые случаи», как неравенства $x^2 + 3 > 0$, $-x^2 - 2 \leq 0$, $2x^2 > 0$ и т. д. При их решении учащиеся в большинстве своём могут пользоваться рассмотренным выше приёмом, т. е. изображать соответствующий график и «считывать» результат. Однако часть учеников, конечно же, должна научиться давать ответ сразу же, не прибегая к рисунку. При этом нужно требовать пояснений, например таких: при любом x $x^2 \geq 0$, а значит, при любом x выполняется неравенство $x^2 + 3 > 0$.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться примерами 1—3 и упражнениями из раздела **А**. При наличии времени из раздела **Б** можно использовать упражнения **294**, **297**, **298** и **300**, в которых для получения квадратного неравенства стандартного вида приходится выполнить несложные тождественные преобразования. Пример 4 и относящиеся к нему упражнения **295**, **296**, **301** не для всех учащихся.

В упражнениях **302**—**304** (раздел **Б**) предлагается решить систему неравенств, в которой одно или оба неравенства являются квадратными. Эта система может быть задана неявно с помощью дополнительного условия (см. упражнения **302** и **303**). Подчеркнём, что решение таких систем — достаточно трудная задача. Заниматься этим есть смысл только с учениками, у которых решение квадратных неравенств не вызывает никаких проблем.

В упражнениях **305—308** решение квадратного неравенства является вспомогательным средством для решения данной задачи: нахождения области определения функции, исследования квадратного уравнения с буквенными коэффициентами (с параметрами). В связи с этим обращаем внимание учителя на то, что в следующей главе учебника есть п. 3.8 «Уравнения с параметром» («*Узнайте больше*»).

Комментарий к упражнениям

295, 296. В качестве образца воспользоваться примером 4.

297, 298. Раскрыть скобки и привести неравенство к виду $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c > 0$.

300. а) Задача сводится к решению неравенства $3x^2 + 2x - 1 < x^2 - x + 1$.

О т в е т: $-2 < x < 0{,}5$.

301. а) Числитель дроби — число положительное. Значит, неравенству удовлетворяют те и только те значения переменной x, при которых будет положителен знаменатель дроби. Приходим к неравенству $(x - 5)\ (x - 10) > 0$.

О т в е т: $x < 5$, $x > 10$.

302—304. Это задания на решение систем неравенств (в упражнениях **302** и **303** они заданы неявно, в виде дополнительного условия). Общие решения неравенств удобно находить с помощью координатной прямой.

302. а) Решения неравенств $x^2 + 2x - 2 < 0$ образуют промежуток $(-1 - \sqrt{3}$; $-1 + \sqrt{3})$. Множество положительных решений показано на рисунке 2.13.

б) О т в е т: $x < 1 - \sqrt{2}$

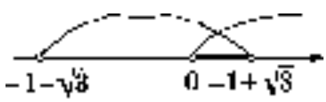

Рис. 2.13

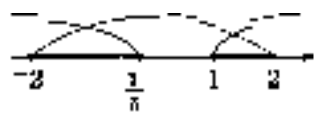

Рис. 2.14

303. а) Неравенство $5x^2 \geq 4x + 1$ выполняется, если $x \leq -\frac{1}{5}$ и $x \geq 1$. Решения этого неравенства, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$, образуют множество, показанное на рисунке 2.14.

О т в е т: $\left[-2;\ -\frac{1}{5}\right] \cup [1;\ 2]$.

304. Неравенства, входящие в систему, решаются по отдельности, а затем их общие решения находятся с помощью координатной прямой.

в) Данная система решений не имеет (рис. 2.15). В качестве *дополнительного вопроса* можно предложить указать множества решений каждой из систем:

$\begin{cases} 6x^2 + 7x + 1 \leq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x^2 + 7x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x^2 + 7x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$

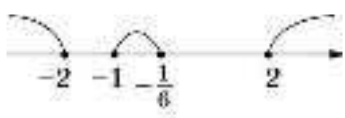

Рис. 2.15

д) Неравенство $x^2 + 5 > 0$ выполняется при любом значении x, поэтому множеством решений системы является множество решений неравенств $x^2 + 5x > 0$.

О т в е т: $x < -5$, $x > 0$.

е) Неравенство $-(x + 1)^2 < 0$ выполняется при всех x, кроме $x = -1$. Значит, нужно решить неравенство $1 - x \geq 0$ и исключить из полученного множества число -1 (если оно ему принадлежит).

О т в е т: $x < -1$, $-1 < x \leq 1$.

305. Нужно найти значения переменной x, при которых имеет смысл квадратный корень в числителе дроби, и исключить из полученного числового множества те значения x, при которых обращается в нуль знаменатель дроби.

г) Задача сводится к решению системы $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Ответ показан на рисунке 2.16.

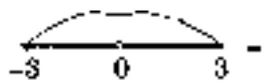

Рис. 2.16

В качестве *дополнительного вопроса* можно предложить найти область определения функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

306—308. В этих упражнениях рассматриваются квадратные уравнения с буквенными коэффициентами (с параметром). Для ответа на вопрос в каждом случае нужно записать дискриминант уравнения и решить соответствующее неравенство (коэффициенты уравнений подобраны таким образом, что все неравенства оказываются квадратными). Наиболее сложными являются упражнения **308** (а, б).

306, б). Умножив обе части уравнения $-2x^2 - bx - 8 = 0$ на -1, получим равносильное уравнение $2x^2 + bx + 8 = 0$. Найдём его дискриминант: $D = b^2 - 64$. Уравнение имеет корни (два или один), если $D \geq 0$. Множество решений неравенства $b^2 - 64 \geq 0$ — объединение промежутков $(-\infty; -8]$ и $[8; +\infty)$.

Дополнительный вопрос. При каких значениях b уравнение имеет единственный корень? Составьте и решите соответствующие уравнения.

307. Второй коэффициент уравнения — число чётное. Получаем неравенство $b^2 - 9 < 0$. Решив его, найдём, что $-3 < b < 3$.

О т в е т: при b, равном -2; -1; 0; 1; 2.

308. а) Прежде всего потребуем, чтобы уравнение было квадратным. Для этого наложим ограничение на букву (параметр) m: $m \neq 0$. (При $m = 0$ мы имеем линейное уравнение, у которого только один корень.) Таким образом, задача сводится к решению системы $\begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m \neq 0. \end{cases}$

О т в е т: при $m \neq 0$ и $|m| < 1$.

б) Имеем систему $\begin{cases} 25-16m^2>0 \\ m\neq 0. \end{cases}$

Множество её решений: $\left(-\frac{5}{4};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{5}{4}\right)$. Ему принадлежат два целых числа: –1 и 1.

2.6. Метод интервалов

Методический комментарий

В пункте рассматривается решение неравенств вида $f(x)>0$ и $f(x)<0$, где $f(x)$ — многочлен, который можно представить как произведение линейных множителей. В теоретической части пункта на конкретном примере неравенства $(x+4)(x-3)(x-1)<0$ подробно разбирается способ их решения. Исследуется знак произведения $(x+4)(x-3)(x-1)$ на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (вся прямая) нулями функции $f(x)=(x+4)(x-3)(x-1)$. В результате формулируется алгоритмическое предписание по решению неравенств такого вида.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться упражнениями из раздела **А**. В упражнениях раздела **Б** для получения неравенства рассматриваемого вида приходится выполнить несложные тождественные преобразования. Подчеркнём, что решением неравенств **315** и **316** есть смысл заниматься только с учениками, у которых решение квадратных неравенств и неравенств, рассматриваемых в упражнении **311** раздела **А**, не вызывает никаких проблем.

Комментарий к упражнениям

311. В качестве образца учащиеся воспользуются примером, рассмотренным в тексте учебника. Подсказка, указанная в упражнении, поможет учащимся не ошибиться в последовательности действий на координатной прямой.

315. в) Для решения неравенства разложим его левую часть на множители: $x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x-3)(x+3)$. Корни каждого множителя отметим на координатной прямой, исследуем знак произведения $(x-1)(x-3)(x+3)$ на каждом интервале и запишем множество решений неравенства — объединение интервалов, на которых $(x-1)(x-3)(x+3)\geq 0$. О т в е т: $[-3;1]\cup[3;+\infty)$.

2.7. График дробно-линейной функции
(*Узнайте больше*)

Методический комментарий

Вводится определение дробно-линейной функции и на конкретных примерах последовательно раскрывается способ построения графика функции вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Следует рекомендовать учащимся, которые будут изучать данный материал, делать все вычисления и построения, рассмотренные в учебнике.

Комментарий к упражнениям

320. б) Выделим целую часть дроби $\dfrac{3-x}{x-1}$:

$$\frac{3-x}{x-1} = -\frac{x-3}{x-1} = -\frac{x-1-2}{x-1} = -1+\frac{2}{x-1}.$$

Асимптотами графика функции $y = \dfrac{3-x}{x-1}$ являются прямые $x = 1$ и $y = -1$ (рис. 2.17).

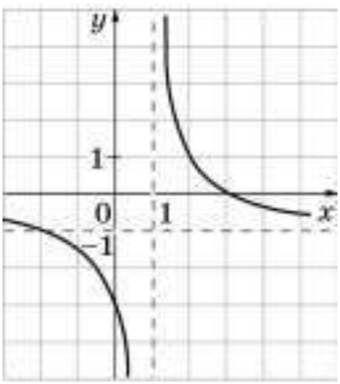

Рис. 2.17

322. а) Выделим целую часть дроби $\dfrac{6x}{2x+1}$:

$$\frac{6x}{2x+1} = \frac{6x+3-3}{2x+1} = \frac{3(2x+1)-3}{2x+1} = 3-\frac{3}{2x+1}.$$

Таким образом, асимптотами графика функции $y = \dfrac{6x}{2x+1}$ являются прямые $x = -\dfrac{1}{2}$ и $y = 3$.

Также можно воспользоваться результатами рассуждений, проведённых в заключительной части объяснительного текста учебника для дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{1}{2} \text{ и } y = \frac{a}{c} = \frac{6}{2} = 3.$$

2.8. Графики уравнений, содержащих модули (*Узнайте больше*)

Комментарий к упражнениям

323. д) На основании определения модуля числа имеем

$$y = \frac{1}{|x-3|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3}, & \text{если} \quad x > 3 \\ -\dfrac{1}{x-3}, & \text{если} \quad x < 3. \end{cases}$$

Далее строим каждый кусок графика уже известным учащимся способом (рис. 2.18).

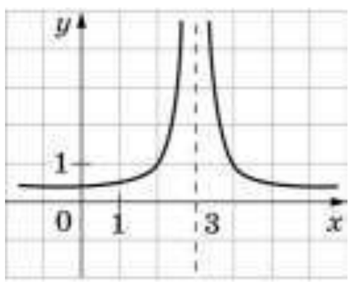

Рис. 2.18

324. в) Если $x \geq 0$, то $y = (5 - x)(x + 1)$; если $x < 0$, то $y = (5 + x)(1 - x)$. Теперь наша функция задана разными уравнениями для $x \geq 0$ и $x < 0$.

График каждого уравнения является параболой. График данной функции изображён на рисунке 2.19.

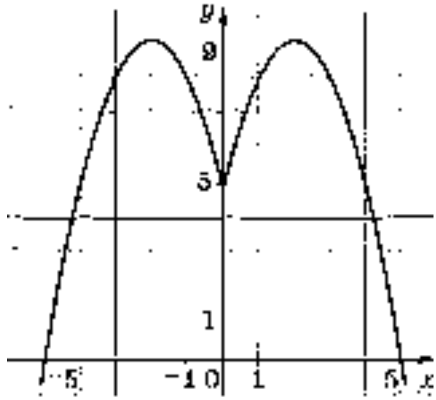

Рис. 2.19

д) Область определения функции: $x \neq \pm 3$. Если $x \geq 0$, то $y = \dfrac{1}{x-3}$. Если $x < 0$, то $y = \dfrac{1}{-x-3} = -\dfrac{1}{x+3}$. Асимптотами графика данной функции являются прямые $x = 3$, $x = -3$ и $y = 0$. Построим каждый график отдельно. Целесообразно предложить учащимся построить сначала первый график карандашом так, как если бы не было условия $x \geq 0$, а затем стереть лишнюю часть (ту часть графика, которая находится в левой полуплоскости). Затем так же карандашом построить второй график и стереть лишнюю часть (рис. 2.20).

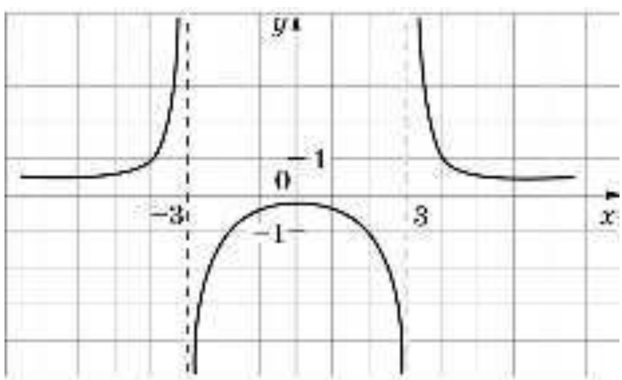

Рис. 2.20

326. Графики изображены на рисунке 2.21, *а*—*г*.

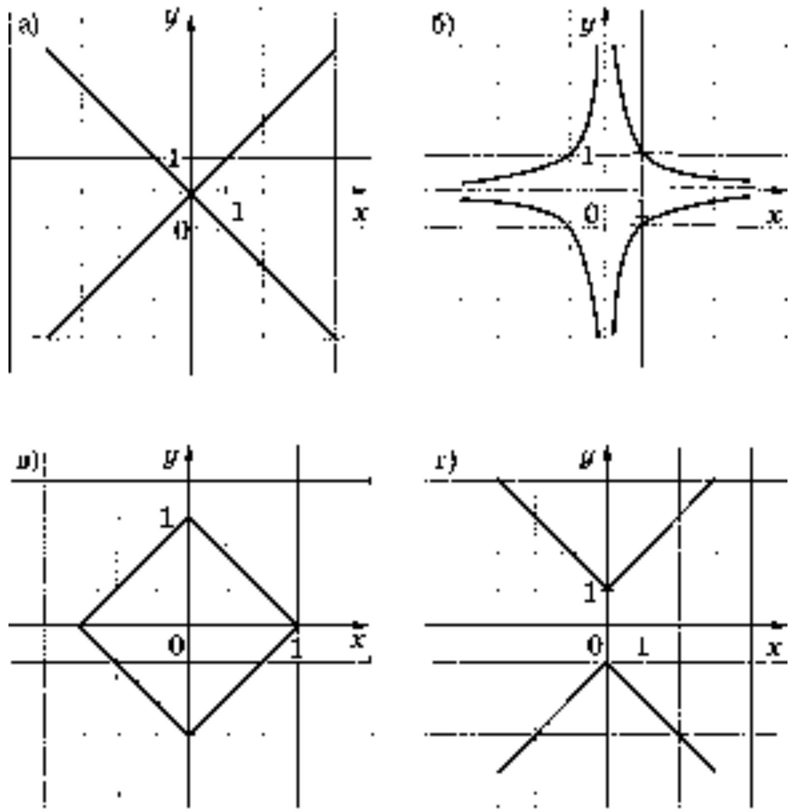

Рис. 2.21

Дополнительные задания

Комментарий к упражнениям

327. б) График функции — гипербола $y=-\dfrac{4}{x}$ без точек с координатами (0; 0) и $\left(3;\ -\dfrac{4}{3}\right)$. Область определения: $x \neq 0$; $x \neq 3$, область значений: $y \neq 0$; $y \neq -\dfrac{4}{3}$.

328. б) График функции — парабола $y = x^2 + x$ без точки с координатами (2; 6) (рис. 2.22); $y > 0$ при $x < -1$, $0 < x < 2$, $x > 2$.

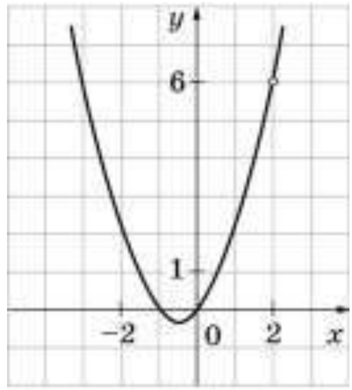

Рис. 2.22

330. а) Функция возрастает на промежутке (0; 2), функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 2.23).

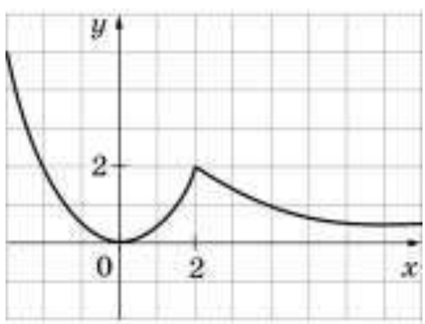

Рис. 2.23

б) Функция возрастает на промежутке (–2; 0), функция убывает на промежутках (–∝; –2) и (0; +∞) (рис. 2.24).

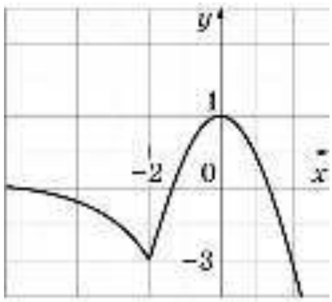

Рис. 2.24

331. а) Функция принимает положительные значения на промежутках (–∞, –1) и (1; +∞), а отрицательные значения на промежутке (–1; 1) (рис. 2.25).

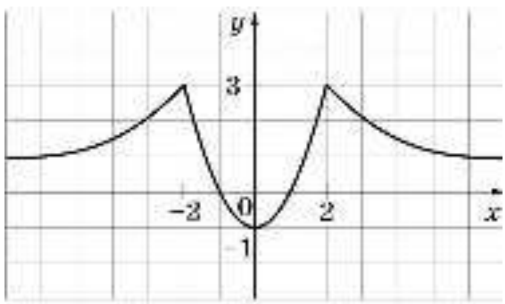

Рис. 2.25

б) Функция принимает положительные значения на промежутке (–2; 2), а отрицательные значения на промежутках (–∞; –2) и (2; +∞) (рис. 2.26).

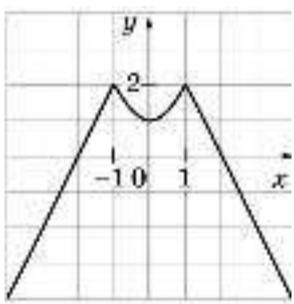

Рис. 2.26

332. а) Прямая $y = a$ имеет с графиком (рис. 2.27) три общие точки при $0 < a < 4$, две общие точки при $a = 0$ и $a = 4$, одну общую точку при $a < 0$ и $a > 4$.

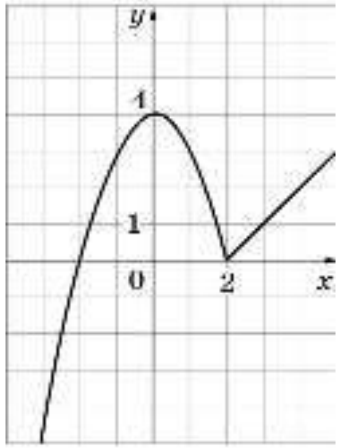

Рис. 2.27

б) Прямая $y = a$ имеет с графиком (рис. 2.28) три общие точки при $-2 < a < -1$, две общие точки при $a = -2$ и $a = -1$, одну общую точку при $a < -2$ и $a > -1$.

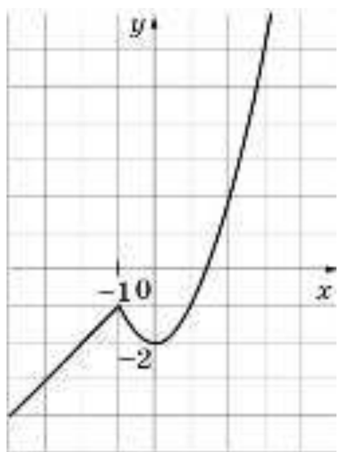

Рис. 2.28

333. б) Уравнение параболы запишем в виде $y = ax^2 + 4$. Подставив в уравнение координаты точки пересечения параболы с осью x, получим $a = -\frac{1}{4}$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$. Если $y = -21$, то, решив уравнение $-21 = -\frac{1}{4}x^2 + 4$, найдём координаты точек пересечения параболы с прямой $y = -21$: $(-10; -21)$ и $(10; -21)$.

335. а) Приведём данное неравенство к виду $8x^2 - 6x - 9 < 0$ и решим его: $-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}$. Найдём целые решения данного неравенства, равные 0 и 1.

336. б) Решив систему неравенств $\begin{cases} 1 - \frac{1}{4}a \geq 0 \\ 33 + 5a - 2a^2 \geq 0, \end{cases}$ получим $\begin{cases} a \leq 4 \\ -3 \leq a \leq 5\frac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $-3 \leq a \leq 4$. Следовательно, область определения данного выражения — отрезок $[-3; 4]$.

Глава 3. Уравнения и системы уравнений (26 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
3.1. Рациональные выражения	4	О-15, «*Проверь себя*», П-23—П-27	88—94
3.2. Целые уравнения 3.3. Дробные уравнения 3.4. Решение задач	10	О-16, П-28 О-17, П-29, П-30 О-18, «*Проверь себя*», П-31—П-33	95—102 103—109 110—111
3.5. Системы уравнений с двумя переменными 3.6. Решение задач	7	О-19, «*Проверь себя*», П-34, П-35 О-20, П-36—П-38	112—124 125—127
3.7. Графическое исследование уравнений	3	О-21, П-39—П-41	128—132
Обзор и контроль	2		

Основные цели: систематизировать сведения о рациональных выражениях и уравнениях; познакомить учащихся с некоторыми приёмами решения уравнений высших степеней, обучить решению дробных уравнений, развить умение решать системы нелинейных уравнений с двумя переменными, а также текстовые задачи; познакомить с применением графиков для исследования и решения систем уравнений с двумя переменными и уравнений с одной переменной.

Обзор главы. Глава посвящена систематизации, обобщению и развитию теоретических представлений и практических умений учащихся, связанных с рациональными выражениями, уравнениями и системами уравнений. Особенностью изложения материала в данном курсе является то, что некоторые сложные понятия (область определения выражения, тождество, доказательство тождеств), трудно усваиваемые учащимися на начальных этапах изучения алгебры, вводятся только в 9 классе, когда у учащихся накоплен значительный опыт работы с рациональными выражениями. Такой подход позволяет им более осознанно воспринимать указанные понятия, а также обсуждать некоторые идейные вопросы, такие как возможность изменения области определения выражения в результате тождественных преобразований.

Ещё одна особенность состоит в том, что в данной главе на фоне введения нового материала повторяются практически все центральные вопросы курса алгебры основной школы: тождественные преобразования, решение уравнений и систем уравнений, решение текстовых задач, построение графиков (уравнений и функций), использование свойств изученных функций.

Глава начинается с вопроса о классификации рациональных выражений; вводятся понятия области определения выражения, тождественно равных выражений и тождества; несколько уроков посвящается преобразованию рациональных выражений, доказательству тождеств. При этом уровень, на который выходят учащиеся, достаточно высокий, и навыки преобразований, полученные в 7 и 8 классах, получают подкрепление и развитие.

Дальнейшее содержание главы связано с уравнениями и системами уравнений. Новым для учащихся здесь является овладение некоторыми способами решения уравнений высших степеней (разложение на множители, введение новой переменной), уравнений с переменной в знаменателе, знакомство с разнообразными приёмами решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными. В главе содержится большое количество задач, решаемых с помощью составления уравнения или системы уравнений. Таким образом, имеется возможность отрабатывать и совершенствовать соответствующие умения, что важно с точки зрения подготовки к экзамену. Завершается глава рассмотрением вопроса о применении графиков к решению и исследованию систем уравнений с двумя переменными и уравнений с одной переменной.

Графические интерпретации рассматриваемых алгебраических фактов широко используются при изложении материала всей главы: при обсуждении вопроса о возможности изменения области определения выражения в результате выполнения некоторых преобразований, для иллюстрации наличия решений у системы уравнений. Формирование у учащихся умения использовать различные эквивалентные языки для описания той или иной математической ситуации поддерживается и в системе упражнений.

Базовый уровень усвоения содержания данного раздела курса 9 класса определяется следующими требованиями:

знать и понимать термины «целое выражение», «дробное выражение», уметь находить область определения несложного дробного выражения с одной переменной;

знать и понимать термин «тождество», уметь приводить примеры тождеств, выполнять преобразования несложных рациональных выражений;

распознавать целые и дробные уравнения, владеть основным приёмом решения дробных уравнений и решать несложные уравнения такого вида, применять условие равенства нулю произведения к решению уравнений вида $(ax + b)(cx + d) = 0$;

понимать графическую интерпретацию уравнения с двумя переменными и системы уравнений с двумя переменными, решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и несложные системы двух уравнений, одно из которых второй степени;

составлять по условию несложной текстовой задачи уравнение с одной переменной или систему двух уравнений с двумя переменными.

Основные виды деятельности. Классифицировать рациональные выражения. Находить область определения рационального выражения; выполнять числовые и буквенные подстановки. Преобразовывать целые и дробные выражения; доказывать тождества. Давать графическую интерпретацию функциональных свойств выражений с одной переменной.

Распознавать целые и дробные уравнения. Решать целые и дробные выражения, применяя различные приёмы.

Строить графики уравнений с двумя переменными. Конструировать эквивалентные речевые высказывания с использованием алгебраического и геометрического языков. Решать системы двух уравнений с двумя переменными, используя широкий набор приёмов.

Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения или системы уравнений; решать составленное уравнение (систему уравнений); интерпретировать результат. Использовать функционально-графические представления для решения и исследования уравнений и систем.

Комментарий к использованию ЭИ. Цель использования ЭИ — расширение представлений учащихся о графиках уравнений с двумя переменными и увеличение удельного веса заданий графического характера.

Основа для изучения данной темы подготовлена материалами таких разделов, как «Линейные уравнения с двумя переменными» и «Функции и их графики». Учащиеся уже встречались с прямой, гиперболой, параболой как с графиками уравнений.

При выполнении заданий п. 5.1 ЭИ «Графики некоторых уравнений второй степени с двумя переменными» этот список пополнится уравнениями окружности (с центром в начале координат и в произвольной точке координатной плоскости), параболы с горизонтальной осью симметрии, эллипса. Задания направлены на формирование умения распознавать уравнения той или иной линии, а также на изучение соответствующей кривой путём наблюдения изменения её формы и положения при изменении параметров уравнения (см., например, задания № 6, 7). Здесь не забыта и эстетическая составляющая темы. Так, в задании № 5 предлагается построить орнамент; подобного рода задания могут придумать и сами учащиеся.

В п. 5.2 ЭИ «Графическое решение и исследование систем уравнений с двумя переменными» предлагается линия использования графиков для решения и исследования уравнений с двумя переменными. Применение компьютера позволяет рассматривать и некоторые системы с параметром, что в традиционной методике является весьма сложной задачей для учащихся. Подчеркнём, что главное здесь — динамичные наблюдения и выявление возможных случаев взаимного расположения графиков, определение числа точек их пересечения (см. задание № 4). Такие задания создают хорошую эмпирическую основу для решения в последующем уравнений и систем с параметрами аналитическими методами.

Логически оправданным продолжением материала, рассмотренного выше, является п. 5.3 ЭИ «Графическое решение уравнений с одной переменной». Акцент здесь делается на отыскание корней уравнений третьей и четвёртой степени (см. задания № 1—4). Итогом выполнения соответствующих заданий могут явиться некоторые обобщения, сделанные на основе наблюдений. Например: уравнение третьей степени всегда имеет хотя бы один корень, а уравнение четвёртой степени (как и квадратное уравнение) нет; уравнение третьей степени может иметь один, два или три корня и т. д.

Завершается тема рассмотрением п. 5.4 ЭИ «Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их системы». Заметим, что в учебнике для 9 класса этот материл не представлен (ни в основном тексте, ни в рубрике «Узнайте больше»).

Но с самой постановкой задачи учащиеся могли познакомиться, рассматривая линейные неравенства с двумя переменными при изучении дополнительного материала к главе 4 учебника для 8 класса. Здесь задача сложнее: если график уравнения — некоторая кривая, то трудно определить области, которые соответствуют неравенству, составленному с помощью знака ≥ или ≤. Однако эта проблема решается с помощью компьютера, и учебная задача состоит в наблюдении, накоплении опыта, формировании умения выполнить в несложных случаях подобное задание самостоятельно на бумаге. Подчеркнём также, что для учащихся обычно привлекательной является возможность получения на координатной плоскости разнообразных «картинок» (см. задания № 4, 5).

Учебник		**ЭИ**		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
3. Уравнения и системы уравнений	3.5. Системы уравнений с двумя переменными	Алгебра, 7—9	5. Уравнения второй степени	5.1. Графики некоторых уравнений второй степени с двумя переменными. 5.2. Графическое решение и исследование систем уравнений с двумя переменными
	3.7. Графическое исследование уравнений			5.3. Графическое решение уравнений с одной переменной.
	—			5.4. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их систем

<u>3.1. Рациональные выражения</u>

Методический комментарий

Пункт завершает изучение линии курса 7—9 классов «Выражения и их преобразования». Здесь подводятся итоги, вводится новая терминология, приводятся определения понятий, уже знакомых учащимся по «первому проходу». Изучение материала представляет собой новый проход данного раздела на более высоком уровне, что позволяет усовершенствовать и развить знания и умения, приобретённые в предшествующие годы.

Содержание пункта можно разбить на три части. Первая — это введение терминологии, связанной с рациональными выражениями, их классификацией: рациональное выражение, целое выражение, дробное выражение, область определения выражения. Заметим, что здесь же вводится понятие иррационального выражения, однако оно не является предметом изучения в 9 классе, и термин используется только как противопоставление, для разъяснения целесообразности использования введённых названий. Такое единовременное введение всех перечисленных понятий на базе уже знакомого материала воспринимается учащимися более осознанно и в результате оказывается более эффективным. Усвоение этого материала обеспечивается упражнениями **342**—**345** (раздел **А**) и **360**—**364** (раздел **Б**).

Вторая часть связана с обобщением и систематизацией знаний об алгебраических преобразованиях. В ней уточняется принятый ещё в 7 классе алгебраический подход к трактовке тождественно равных выражений: рациональные выражения, которые могут быть получены одно из другого с помощью алгебраических преобразований, называют тождественно равными (или просто равными). Вводится понятие тождества, впервые в явной формулировке перед учащимися ставится задача доказать тождество. Рассматриваются различные способы доказательства тождеств (примеры 5 и 6).

В третьей части пункта понятие тождества раскрывается с функциональной точки зрения: на общей области определения тождественно равные выражения при одних и тех же значениях переменных принимают одинаковые значения. Для наглядности этот вывод иллюстрируется с помощью графиков. Одновременно этот материал можно использовать как образец для построения такого рода графиков.

Основное, что должны повторить и чему должны научиться учащиеся в результате изучения пункта, состоит в следующем:

выполнять числовые подстановки в буквенные выражения и находить их значения;

находить область определения целых и дробных выражений;

выполнять преобразования выражений (целых и дробных).

Высокий уровень усвоения материала характеризуется усвоением способов доказательства тождеств, умением соотнести алгебраический и графический языки.

Четыре урока, отводимые на этот пункт, можно спланировать следующим образом. На первом уроке поговорить о рациональных выражениях — целых и дробных, ввести понятие области определения выражения, разобрав примеры 1 и 2, определение тождественно равных выражений и разобрать примеры 3 и 4. Можно закрепить материал, решив с учащимися часть упражнений из заданий **342**, **343**—**348**. На втором уроке продолжить работу над этими понятиями, подключив упражнения **349—353**, а также некоторые задания из раздела **Б** (задачи **360—364**). Третий и четвёртый уроки посвятить рассмотрению понятия тождества и доказательству тождеств, решению различных задач.

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться упражнениями раздела **А**, а из раздела **Б** рассмотреть упражнения **363**, **368**, **369** (и, возможно, упражнения **364** и **376** (а, б).

Комментарий к упражнениям

342—343. Упражнения направлены, в частности, на предупреждение формализма при усвоении понятия области определения выражения.

343. а) При $x = 5$ и $y = -5$ имеем $\frac{x+y}{xy} = \frac{5+(-5)}{5\cdot(-5)} = 0$. При $x = 0$ (и любом y) выражение $\frac{x+y}{xy}$ не имеет смысла. Поэтому при $x = 0$ и $y = 3$ вычислить его значение нельзя.

б) О т в е т: 1; $1\frac{1}{3}$.

в) О т в е т: $\frac{1}{3}$; $-\frac{26}{27}$.

г) При $a = b = 1$ двучлен $a - b$ равен нулю, следовательно, каким бы ни было значение c, знаменатель обращается в нуль и выражение смысла не имеет. При следующей тройке значений получаем $1\frac{1}{3}$.

344. Рассуждения аналогичны приведённым в объяснительном тексте учебника (пример 1).

345. а) Выражение представляет собой сумму дробей, и оно имеет смысл, когда имеют смысл обе дроби. Поэтому, чтобы найти область определения данного выражения, надо из множества всех чисел исключить те, при которых не имеет смысла хотя бы одно из слагаемых. Первая дробь не имеет смысла при $x = 0$, вторая — при $x = 3$. Поэтому область определения выражения — все числа, кроме 0 и 3.

д) Данное выражение — «многоэтажная» дробь. Её знаменатель обращается в нуль при $a = -1$, а числитель содержит дробь, знаменатель которой обращается в нуль при $a = 0$. Значит, областью определения данного выражения является множество всех чисел, кроме 0 и -1.

346. Обратить внимание на то, что могут быть составлены различные целые и дробные выражения.

Основное назначение упражнений **347** и **348** состоит в восстановлении навыков алгебраических преобразований. Постановка вопроса в этих упражнениях нестандартна и привлекательна для учащихся. При выполнении упражнения **347** желательно проводить рассуждения вслух.

347. 2) Квадраты противоположных выражений равны, а потому ответ должен быть $\frac{1}{ab}$, менять знак перед дробью не следовало.

3) Разложив числитель на множители, получим в числителе и знаменателе противоположные выражения $m - n$ и $n - m$. Перед тем как сокращать дробь, надо одно из них заменить противоположным и при этом изменить знак у дроби, т. е. перед дробью должен стоять знак «минус».

348. О т в е т: а) 1; б) 2; в) 3; г) 3.

350—352. Повторяются основные преобразования алгебраических выражений. Трудные случаи: изменение знака у членов дроби, совместные действия над алгебраическими дробями и многочленами, разложение на множители квадратного трёхчлена. В упражнении **350** (в) рекомендуется при приведении дробей к общему знаменателю рассмотреть разные возможности:

$$\frac{2}{3-a}+\frac{a+2}{a-3}=\frac{-2}{a-3}+\frac{a+2}{a-3},$$

$$\text{или } \frac{2}{3-a}+\frac{a+2}{a-3}=\frac{2}{3-a}+\frac{-a-2}{3-a},$$

$$\text{или } \frac{2}{3-a}+\frac{a+2}{a-3}=\frac{2}{3-a}-\frac{a+2}{3-a}.$$

353. Прежде всего данное выражение нужно преобразовать: тогда оно примет более простой вид и вычисления будет выполнить проще. Однако следует помнить, что в результате преобразования область определения выражения может измениться (стать шире). Поэтому каждый раз необходимо проверять, что при указанном значении переменной (или паре значений переменных) имеет смысл не только получившееся выражение, но и исходное.

а) $\frac{a^2+4}{a^2-4}-\frac{a}{a+2}=\frac{2}{a-2}$. При $a = \frac{2}{3}$ оба выражения имеют смысл, а поэтому значение переменной можно подставить в выражение $\frac{2}{a-2}$; получим $-1\frac{1}{2}$. При $a = -4$ получим $-\frac{1}{3}$. При $a = 2$ второе выражение не имеет смысла (первое, естественно, тоже).

б) Получим выражение $\frac{c+5}{10}$. При $c = 2{,}5$ получаем 0,75; при $c = 0$ исходное выражение не имеет смысла; при $c = -37$ получим –3,2.

в) Получим выражение $-\frac{n}{m-n}$. При $m = \frac{1}{4}$ и $n = \frac{1}{2}$ получим 2; при $m = -15$ и $n = -18$ получим 6; при $m = 0$ исходное выражение не имеет смысла; при $m = 10$ и $n = 0$ получаем 0.

г) Получим выражение $x + y$. При $x = 12$ и $y = -15$ имеем -3; при $x = -\frac{2}{3}$ и $y = \frac{5}{6}$ имеем $\frac{1}{6}$; при $x = 0$ и $y = 22$ исходное выражение не имеет смысла; при $x = 5$ и $y = 5$ исходное выражение не имеет смысла.

354. Помимо прямого преобразования левой части равенства, полезно рассмотреть и другое решение — применить формулу квадрата разности (суммы) двух двучленов.

а) $((x - y) - (x + y))^2 = (-2y)^2 = 4y^2$; получили правую часть равенства; тождество доказано.

356. 1) Целесообразно предварительно обсудить способы доказательства — свести все выражения к многочлену стандартного вида или же преобразовать всё к одному из данных выражений, например к выражению $(x^2 - 1)^2$.

358. Доказательство сводится к доказательству соответствующих тождеств, например:

а) $\left(x - y - \frac{x^2 - y^2}{y}\right) \cdot \frac{y}{xy - x^2} = 1.$

359. а) Выполнив преобразование данного выражения, получим тождественно равное ему выражение $a^2 + b^2$, значения которого неотрицательны при любых a и b. Следовательно, при всех значениях переменных значение данного выражения также является числом неотрицательным.

360. Общий алгоритм рассуждений таков: область определения данного выражения — множество всех чисел, при которых обе дроби, входящие в выражение, имеют смысл; поэтому для каждой из дробей найдём значения переменной, обращающие её знаменатель в нуль, и исключим все такие значения из множества действительных чисел.

в) Знаменатель первой дроби обращается в нуль при $x = 5$ и $x = -4$, а знаменатель второй дроби — при $x = 3$ и $x = -3$. Значит, областью определения данного выражения является множество всех чисел, кроме $-4, -3, 3, 5$.

361. Образец рассуждений дан в примере 2. Целесообразно разобрать сразу (в классе) все задания, чтобы сопоставить ответы. Первое выражение не имеет смысла, если x и y равны; второе — когда x и y — противоположные числа; третье — если хотя бы одна из переменных равна 0; четвёртое выражение теряет смысл только в случае, когда $x = y = 0$.

362. О т в е т: а) все значения x, y и z, кроме $x = y = z = 0$; б) x и y — любые числа; в) $x \neq -y$.

363. Основным признаком, по которому в данном случае следует соотносить графики (рис. 3.2 учебника) и формулы, является совпадение областей определения функции, изображённой на графике, и заданной аналитически. Рассмотрим область определения функции, график которой изображён на рисунке $\boxed{1}$, — это множество всех чисел, кроме 1. Значит, рассматриваемый график является графиком функции

$y = \dfrac{1}{x-1}$. График $\boxed{2}$ соотносится с формулой $y = \dfrac{1}{x}$ $y = \dfrac{1}{x}$, график $\boxed{3}$ — с формулой $y = \dfrac{1}{x+1}$.

364. Так же как и в предыдущей задаче, соотносим графики и формулы на основе сопоставления областей определения функций, заданных графически и аналитически.

а) График $\boxed{1}$ соответствует формуле $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, а график $\boxed{2}$ — формуле $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

б) График $\boxed{1}$ соответствует формуле $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$, а график $\boxed{2}$ соответствует формуле $g(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

В самом деле, выражение $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ имеет смысл при любом x, а на ке $\boxed{1}$ нет разрывов. Выражение $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$ не имеет смысла при $x = 1$, а график $\boxed{2}$ в точке
$x = 1$ разрывается (т. е. на графике нет точки с абсциссой $x = 1$).

368. После раскрытия скобок в левой части сразу же получаются известные тождества. Проблема только в том, что учащиеся могут их не знать или не помнить.

Если формулы неизвестны, можно попробовать преобразовать правую часть в левую.

а) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$.

Получили левую часть равенства. Тождество доказано.

369. Преобразования в обоих случаях аналогичны.

а) $(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) - (m^2 - 1)^2 - m^2 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) - (m^2 - 1)^2 - m^2 =$
$= (m^2 - 1)(m^2 + 1 - m^2 + 1) - m^2 = m^2 - 2$.

Тождество доказано.

370. а) *Способ 1*. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 =$
$= x^4 + x^2 + 1$.

Способ 2. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

371. а) По правилу нахождения неизвестного слагаемого $A = \dfrac{2x+9}{x^2-x-6} - \dfrac{3}{x-3}$.

Выполнив преобразования, получим $A = -\dfrac{1}{x+2}$. Полезно предложить учащимся проверить правильность ответа, подставив вместо A в исходное равенство полученное выражение и выполнив преобразования.

О т в е т: б) $\dfrac{3}{x-1}$; в) $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$; г) $\dfrac{x}{(x-1)(x+3)}$.

374. Преобразования будут менее громоздкими, если воспользоваться заменой.

а) Пусть $\dfrac{1+x}{1-x}=y$, тогда данное выражение можно записать в виде $y^2+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2-2=\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2$. Вернёмся в выражении $\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2$ к переменной x и выполним преобразования:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\left(\frac{4x}{1-x^2}\right)^2.$$

б) Воспользуемся заменой $\dfrac{a^2}{a+1}=y$.

376. а) $y=x-2$ при $x\neq-2$ (рис. 3.1, *а*);

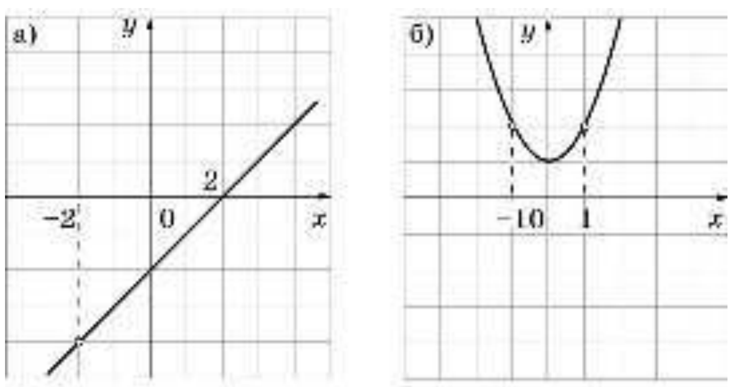

Рис. 3.1

б) $y=\dfrac{1}{x}$ при $x\neq1$;

в) $y=x-5$ при $x\neq-1$;

г) $y=x^2+1$ при $x\neq\pm1$ (рис. 3.1, *б*).

377. а) $y=x$, где $x\geq0$;

б) $y=|x|$;

в) $y=x-1$, где $x\geq1$.

3.2. Целые уравнения

Методический комментарий

Основное содержание пункта связано с систематизацией и расширением знаний о решении целых уравнений. Прежде всего вводятся новые термины — целое уравнение, дробное уравнение, рассматривается вопрос о степени целого уравнения, напоминаются известные способы решения уравнений первой и второй степеней. Повторению приёмов решения таких уравнений посвящены упражнения **378** и **379**.

Новый материал — это приёмы решения уравнений, степень которых выше двух; рассматриваются способ разложения на множители и способ введения новой переменной. Особенностью изложения является «исторический фон», который, в частности, помогает учащимся осознать ограниченность применения этих приёмов.

В упражнениях из раздела **А** акцент сделан на решении уравнений с помощью разложения на множители, а в упражнениях из раздела **Б** — с помощью замены переменной; второй приём объективно более сложен. Кроме того, в разделе **Б** продолжается линия упражнений, основной идеей которых является взаимосвязь аналитического и графического способов задания функции.

Заметим, что при выполнении заданий к данному пункту у учащихся могут возникать проблемы, обусловленные комплексным характером этих упражнений. Так, чтобы решить уравнение первым из рассмотренных приёмов, ученик должен владеть приёмами разложения многочлена на множители, а также знать и уметь использовать условие равенства произведения нулю. Поэтому упражнения должны отбираться строго с учётом возможностей класса.

В классе с невысоким уровнем подготовки рекомендуем прежде всего упражнения **378**—**381**, **384** (а, б, г, д), **385** (1), **388**, **392**, **393**.

Комментарий к упражнениям

378—**379**. Особенность рассматриваемых уравнений — наличие дробных коэффициентов. Первый шаг в их решении состоит в том, чтобы избавиться от дробей, умножив обе части уравнения на «удобное» число.

378. О т в е т: а) 5; б) –14; в) –3; г) 20; д) 0; е) –4.

380. Упражнение направлено на отработку способа решения целого уравнения, когда его левая часть представлена в виде произведения многочленов, а правая равна 0. В качестве *дополнительного задания* можно предлагать учащимся в каждом случае определять степень уравнения.

383. Типичная ошибка — сокращение обеих частей уравнения на общий множитель. В результате теряется корень.

а) Представим уравнение в виде $f(x) = 0$ и разложим левую часть на множители:

$$(2x - 1)(x - 5) - x(x - 5) = 0,$$
$$(x - 5)(2x - 1 - x) = 0 \text{ и т. д.}$$

385. 2) Возьмём какое-нибудь квадратное уравнение, имеющее два положительных корня, например $y^2 - 5y + 6 = 0$. Тогда путём замены $y = x^2$ получим биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, имеющее четыре корня.

Чтобы получить биквадратное уравнение, имеющее два корня, можно задать квадратное уравнение, имеющее один положительный и один отрицательный корень, например $y^2 - 2y - 8 = 0$. Получим уравнение $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

391. а) Замена: $y = \sqrt{x}$. Решив уравнение $y^2 - y - 12 = 0$, получим $\sqrt{x} = -3$ или $\sqrt{x} = 4$. Первое из этих уравнений корней не имеет, корень второго — число 16.

О т в е т: 16.

в) Введём замену: $\sqrt{x-1} = y$. Получим уравнение $y^2 - 2y - 35 = 0$, корни которого 7 и –5. Теперь решим уравнения $\sqrt{x-1} = 7$ и $\sqrt{x-1} = -5$:

$$\sqrt{x-1} = 7,\ x - 1 = 49,\ x = 50;$$

$$\sqrt{x-1} = -5, \text{ нет корней.}$$

О т в е т: 50.

392. Будем прежде всего сопоставлять нули функций и абсциссы точек пересечения графиков с осью x.

Нулями функции $f(x)$ являются числа 1, –1, 3. В точках с такими абсциссами пересекает ось x график $\boxed{3}$, следовательно, именно он является графиком функции $f(x)$.

Функция $g(x)$ обращается в 0 при значениях x, равных –1, 1 и –3. Но такая ситуация изображена на графиках $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, следовательно, вычисления нулей функции $g(x)$ недостаточно, чтобы найти соответствующий ей график. Найдём точку пересечения графика этой функции с осью y. Для этого подставим в формулу значение $x = 0$; получим $y = -3$. Из двух графиков нашим требованиям отвечает только график $\boxed{1}$, следовательно, он и является графиком функции $g(x)$.

Рассуждая далее таким же образом, выясним, что график $\boxed{4}$ является графиком функции $p(x)$, а график 3 — графиком функции $q(x)$.

394. а) Функция $y = x^4 - 5x^2 + 4$ принимает значение, равное 0, при x, равном –2; –1; 1; 2. Следовательно, уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ имеет четыре корня: –2; –1; 1; 2.

б) О т в е т: $x = 1$ и $x = 3$.

3.3. Дробные уравнения

Методический комментарий

Общий способ решения дробных уравнений вводится с опорой на известный учащимся способ решения целых уравнений, содержащих дробные коэффициенты. Параллельное рассмотрение «похожих» уравнений и выяснение различий в их решении облегчает усвоение нового алгоритма. Следует подчеркнуть, что при решении дробного уравнения проверка найденных значений переменной является его обязательной составной частью (см. рассуждения в конце примеров 1—3).

Помимо общего способа решения дробных уравнений путём умножения на общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, в пункте рассматриваются приёмы решения двух частных видов таких уравнений (см. примеры 2 и 3), однако акцент следует сделать на овладение общим приёмом.

На изучение пункта отводится 4 урока. Начиная с третьего или четвёртого урока к системе упражнений целесообразно подключить текстовые задачи (см. п. 3.4). Это позволит разнообразить работу учащихся, расширить временные рамки трудного для учащихся вида деятельности по решению текстовых задач.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем при наличии времени, помимо задач раздела **А** разобрать задания **405**—**407** (частично) и **410**.

Комментарий к упражнениям

398. О т в е т: а) $\frac{5}{3}$; $-\frac{3}{5}$; б) –2; $-\frac{1}{2}$; в) 1; $\frac{3}{2}$; г) 5; 1; д) 1; $\frac{1}{7}$; е) –3 $\pm\sqrt{14}$.

399. Условие задач — это фактически словесное описание уравнений типа **398**, ***а***, ***б***. Повод вспомнить, что обратным числу a (не равному нулю) является число $\frac{1}{a}$.

400. Нужно решить уравнение и из четырёх ответов выбрать верный — это ответ 2). В качестве образца для решения взять пример 2 из текста. Задание готовит к решению уравнений из упражнения **401**.

402. О т в е т: а) 3; б) 10; в) 0,5; г) 7; д) 3; е) 1,6; ж) 3 и –1; з) 2 и 3.

410. а) В точке A график пересекает ось y, т. е. её абсцисса равна 0. Подставив $x = 0$ в формулу $y=\frac{2x-1}{x-2}$, получим, что $y=\frac{1}{2}$. Координаты точки A: $x = 0$, $y=\frac{1}{2}$.

В точке B график пересекает ось x, т. е. её ордината равна 0. Подставив $y = 0$ в формулу $y=\frac{2x-1}{x-2}$, получим уравнение $\frac{2x-1}{x-2}=0$.

Решив его, найдём, что $x=\frac{1}{2}$. Координаты точки B: $x=\frac{1}{2}$, $y = 0$.

В точке C функция $y=\frac{2x-1}{x-2}$ не определена. (Через эту точку проходит вертикальная прямая, которая «разрывает» гиперболу на две части.) Но дробь $\frac{2x-1}{x-2}$ не имеет смысла только при $x = 2$, следовательно, абсцисса точки C равна 2. Координаты точки C: $x = 2$, $y = 0$.

411. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x^2+1}$. Вопрос о том, пересекает ли график функции $y=\frac{1}{x^2+1}$ ось x, эквивалентен вопросу: «Существуют ли значения x, при которых значение функции равно 0?», или иначе: «Имеет ли уравнение $\frac{1}{x^2+1}=0$ корни?» Уравнение $\frac{1}{x^2+1}=0$ корней не имеет, так как выражение $\frac{1}{x^2+1}$ ни при каких значениях x в нуль не обращается. Следовательно, график данной функции ось x не пересекает.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Уравнение $\dfrac{x^2}{x^2+1}=0$ имеет корень, равный 0. График функции пересекает ось x в точке с абсциссой 0, а именно в точке (0; 0) — начале координат.

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос для функции $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$, решим уравнение $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=0$. Получим $x = 0$. Подставив $x = 0$ в формулу, найдём, что $y = 0$. График пересекает ось x в точке (0; 0).

И наконец, решив уравнение $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=0$ для четвёртой функции, получим, что оно не имеет корней. Следовательно, график этой функции не пересекает ось x.

Для того чтобы полученные выводы приобрели наглядный смысл, полезно показать учащимся, как выглядят графики рассмотренных функций (рис. 3.2).

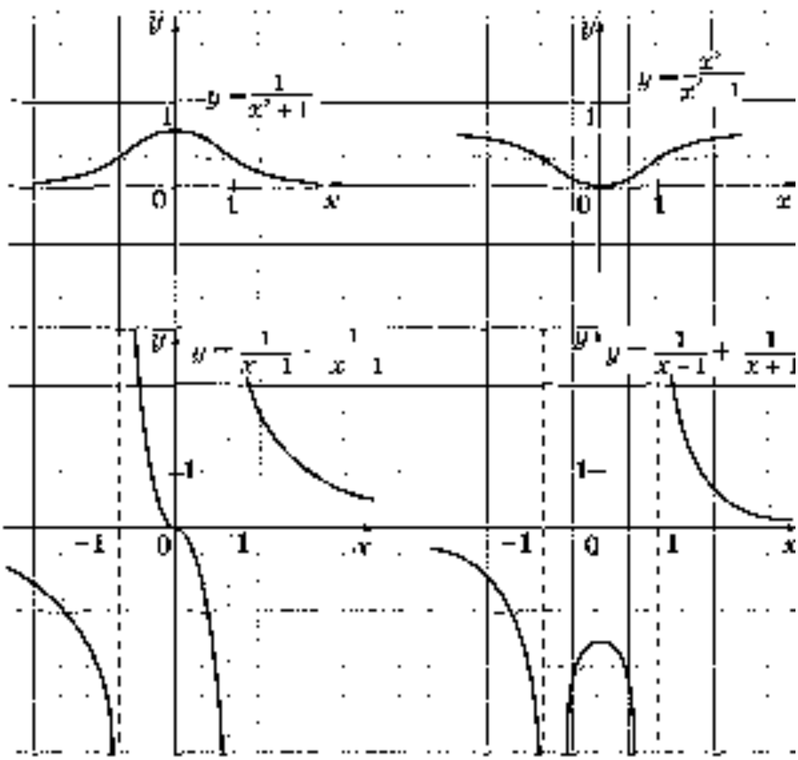

Рис. 3.2

412. а) 1) Дробь равна 0 в том и только том случае, когда её числитель равен 0, а знаменатель отличен от нуля.

Приравняем к нулю числитель: $y+\dfrac{1}{y-1}=0$. Получим уравнение, которое сводится к уравнению $y^2 - y + 1 = 0$, не имеющему корней. Следовательно, значений переменной, при которых дробь обращается в 0, не существует.

2) Дробь не имеет смысла, когда хотя бы один из знаменателей равен 0, т. е. когда $y - 1 = 0$, или $y + 1 = 0$, или $1-\dfrac{1}{y+1}=0$. Решив эти уравнения, найдём, что $y = 1$, $y = -1$ или $y = 0$. Таким образом, дробь имеет смысл при $y \neq 0$ и $y \neq \pm 1$.

О т в е т: б) 1) $c = -0{,}5$; 2) $c \neq 0$, $c \neq \pm 1$, $c \neq 0{,}5$.

в) 1) $x = 0$; 2) $x \neq 1$, $x \neq \pm 0{,}5$; $x \neq -2$.

414. а) Введём замену: $x^2 + x = y$. Получим уравнение $\dfrac{15}{y+1} = 2y + 1$. Преобразовав его к виду $2y^2 + 3y - 14 = 0$, найдём корни $y_1 = 2$ и $y_2 = -3{,}5$. Вернёмся к переменной x:

1) $x^2 + x = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; 2) $x^2 + x = -3{,}5$; нет корней.

О т в е т: –2; 1.

б) Введём замену: $x^2 - 3x = y$ (можно ввести и другие замены, например, $x^2 - 3x - 1 = y$, однако первая удобнее и порождает меньше ошибок). Получим уравнение $\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{y-2}=\dfrac{5}{y+2}$. Отсюда $3y^2 - 16y + 16 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = \dfrac{4}{3}$.

1) $x^2 - 3x = 4$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$;

2) $x^2 - 3x = \dfrac{4}{3}$, $3x^2 - 9x - 4 = 0$, $x_{3,\,4} = \dfrac{9 \pm \sqrt{129}}{6}$.

О т в е т: –1; 4; $\dfrac{9 \pm \sqrt{129}}{6}$.

в) Пусть $1 + \dfrac{1}{x} = y$. Получаем уравнение

$$y^2 - 5(y + 1) + 11 = 0;\ y_1 = 2;\ y_2 = 3.$$

Решим уравнения с переменной x:

1) $1 + \dfrac{1}{x} = 2$; $\dfrac{1}{x} = 1$; $x = 1$;

2) $1 + \dfrac{1}{x} = 3$; $\dfrac{1}{x} = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$.

О т в е т: 1; $\dfrac{1}{2}$.

415. а) $x^2 - 3 = y$. Получим уравнение $y + \frac{1}{y} = 2$; $y^2 - 2y + 1 = 0$; $(y - 1)^2 = 0$; $y = 1$.

Теперь решим уравнение $x^2 - 3 = 1$; $x = \pm 2$.

Ответ: –2; 2.

б) $\frac{x^2+1}{x} = y$. Получим уравнение $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$; $2y^2 - 5y + 2 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\frac{x^2+1}{x} = 2$; $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$;

2) $\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{2}$, $2x^2 - x + 2 = 0$, корней нет.

Ответ: 1.

в) Замена: $\frac{x+1}{x^2} = y$.

Ответ: 1; –0,5.

3.4. Решение задач

Методический комментарий

Новым в данном пункте является только то, что уравнения, которые получаются в результате перевода задач на математический язык, являются дробными; навыки, приобретённые при изучении предыдущего пункта, получат теперь применение.

Полное решение текстовой задачи — дело достаточно трудоёмкое, при этом каждый его этап является для учащихся отдельной проблемой. Поэтому рекомендуем в ряде случаев ограничиться лишь составлением уравнения, т. е. переводом задачи на алгебраический язык. Этот этап очень важен и имеет самостоятельное дидактическое значение. А в классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем сделать акцент именно на этом моменте и лишь несколько задач решить полностью.

Комментарий к упражнениям

416. а) Задача содержит два вопроса. Любая из величин — скорость или время — может быть взята в качестве неизвестной для составления уравнения. Поэтому рекомендуется решить эту задачу двумя способами — сначала составить уравнение, обозначив буквой скорость, с которой ехал Иван, а затем — время, за которое он проехал указанное расстояние.

1) Пусть x км/ч — скорость велосипедиста. Составляем уравнение: $\frac{24}{x} = \frac{84}{x+30}$.

Решив его, найдём скорость велосипедиста: 12 км/ч. Используя этот результат, найдём время: 2 ч.

2) Пусть x ч — время, затраченное на путь, равный 24 км. Имеем уравнение $\frac{24}{x}=\frac{84}{x}-30$. Решив его, найдём время поездки на велосипеде: 2 ч. Используя этот результат, найдём скорость: 12 км/ч.

б) Учащиеся могут поставить два вопроса, аналогичные вопросам задачи в пункте «а»: с какой скоростью шёл пешеход? за какое время прошёл он это расстояние? Те же самые вопросы могут быть поставлены и относительно велосипедиста. Далее учащиеся должны прийти к заключению о том, что можно любую из неизвестных величин обозначить буквой, составить и решить уравнение и, пользуясь полученным значением неизвестной величины, найти все остальные. Пусть каждый из учащихся составит уравнение по своему выбору.

417—421. Формулировки задач нацелены на то, чтобы вновь обратить внимание учащихся на следующее: для составления уравнения можно обозначить буквой любую из неизвестных величин, необязательно ту, о которой идёт речь в вопросе задачи.

419. а) Пусть велосипедист ехал по шоссе со скоростью x км/ч. Имеем уравнение $\frac{7}{x}+\frac{5}{x-4}=1$. Корни этого уравнения — числа 14 и 2. По условию задачи скорость велосипедиста, когда он ехал по шоссе, на 4 км/ч больше, чем его скорость, когда он ехал по просёлочной дороге, т. е. $x > 4$. Этому условию удовлетворяет только первый корень.

О т в е т: велосипедист ехал по шоссе со скоростью 14 км/ч.

Дополнительные вопросы. Сколько времени ехал велосипедист по шоссе и сколько — по просёлочной дороге? С какой скоростью ехал велосипедист по просёлочной дороге? Пусть учащиеся найдут ответы на эти вопросы, используя полученный выше ответ и другие данные задачи.

425. б) Выразим время в часах: 2 ч 40 мин = $2\frac{2}{3}$ ч = $\frac{8}{3}$ ч. Пусть x км/ч — скорость пешехода при подъёме на пути от Баковки до Аникеевки. Приходим к уравнению $\frac{5}{x}+\frac{6}{x+3}=\frac{8}{3}$, которое имеет два корня: 3 и $-\frac{15}{8}$. Условию задачи удовлетворяет только первый корень, следовательно, скорость пешехода при подъёме 3 км/ч, а при спуске 6 км/ч. Найдём время, за которое пешеход пройдёт обратный путь: $\frac{6}{3}+\frac{5}{6}$ ч = $2\frac{5}{6}$ ч = 2 ч 50 мин.

426. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста на шоссе. Получим уравнение $\frac{36}{x-6}+\frac{9}{x}=\frac{45}{x}+1$.

О т в е т: 18 км/ч.

428. Выразим время в часах: 24 мин = $\frac{2}{5}$ ч. Пусть x км/ч — первоначальная скорость поезда. Составим уравнение: $\frac{70}{x}=\frac{2}{5}+\frac{70}{x+20}$. Решим его:

$$70 \cdot 5 \cdot (x + 20) = 2x(x + 20) + 70x \cdot 5,$$
$$70 \cdot 5 \cdot 20 = 2x^2 + 2 \cdot 20x, \quad 3500 = x^2 + 20x,$$
$$x_1 = 50, \quad x_2 = -60.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень.

О т в е т: 50 км/ч.

431. Найдём время, затраченное на прогулке собственно на движение, и выразим его в часах: 2 ч – 15 мин = 1 ч 45 мин = $\frac{7}{4}$ ч. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки. Составляем уравнение: $\frac{10}{x+1}+\frac{6}{x-1}=\frac{7}{4}$.

О т в е т: 9 км/ч.

433. Пусть x ч — время, на которое было рассчитано задание. Тогда норма упаковки составит $\frac{60}{x}$ бандеролей в час. Имеем уравнение

$$\left(\frac{60}{x}-2\right)\cdot 2+\left(\frac{60}{x}+4\right)(x-3)+2=60.$$

Если обозначить буквой x количество бандеролей, которое Сергей должен был упаковывать в час по норме, то уравнение будет таким:

$$2(x-2)+\left(\frac{60}{x}-3\right)(x+4)=58.$$

О т в е т: на 6 ч.

434. 40% от 15 тыс. р. составляет 6 тыс. р., значит, на первые премии выделено 6 тыс. р., а на вторые премии — 9 тыс. р. Уравнение будет проще, если буквой x обозначить величину одной из премий. Пусть первая премия составляет x р., тогда вторая премия составляет $0{,}5x$ р.

Имеем уравнение $\frac{9}{0{,}5x}-\frac{6}{x}=4$, откуда $\frac{18}{x}-\frac{6}{x}=4$, $\frac{12}{x}$ = 4, x = 3. Таким образом, первая премия составляет 3 тыс. р., её получили 6 : 3 = 2 студента, а вторых премий выдано на 4 больше, её получили 6 студентов.

435. Так как мастер выполнил 75% заказа, сшив 90 сумок, то его ученик выполнил 25% заказа, сшив 30 сумок. Пусть мастер шил x сумок в день, тогда его ученик шил $0{,}3x$ сумок в день. Имеем уравнение $\frac{90}{x}+1=\frac{30}{0{,}3x}$.

О т в е т: 10 сумок и 3 сумки.

436—439. Это цепочка задач, первые три из которых — задачи на совместную работу. В задаче **436** дан образец, которым можно воспользоваться при решении следующих задач этой группы. Задача **439**, хотя и является задачей на движение, решается она тем же приёмом, что и три предыдущие.

439. Пусть катер проходит расстояние от A до B за x мин. Тогда $x + 12$ мин — время, за которое теплоход проходит расстояние от B до A; $\frac{1}{x}$ — часть расстояния от A до B, которую проходит за 1 мин катер; $\frac{1}{x+12}$ — часть расстояния от B до A, которую проходит за 1 мин теплоход.

До встречи теплоход шёл 20 мин, а катер — на 12 мин больше, т. е. 32 мин. Сумма пройденных ими расстояний составит всё расстояние между A и B. Составляем уравнение:

$$\frac{1}{x}\cdot 32+\frac{1}{x+12}\cdot 20=1;\ x_1 = 48,\ x_2 = -8.$$

О т в е т: за 48 мин.

3.5. Системы уравнений с двумя переменными

Методический комментарий

Цель изучения данного пункта — расширение представлений учащихся о системах уравнений с двумя переменными и способах их решения. Значительное внимание в пункте уделено графическим интерпретациям, нахождению решений систем уравнений с помощью графиков. Основное содержание связано с системами, в которых только одно уравнение является линейным или вообще нет линейных уравнений. Основной способ решения — способ подстановки, однако в ходе выполнения упражнений можно показать и некоторые специальные приёмы. Если же у учащихся возникнет желание познакомиться более основательно с некоторыми приёмами решения систем уравнений второй степени, то они могут обратиться к п. 3.9, который дан под рубрикой «*Узнайте больше*».

В этом пункте продолжается содержательная линия, начатая в 8 классе и относящаяся, по сути, к элементам аналитической геометрии. Здесь рассматривается задача составления уравнения параболы по трём заданным точкам.

Основные результаты изучения пункта заключаются в том, чтобы учащиеся научились пользоваться графическими средствами для определения числа решений системы уравнений и в несложных случаях находить решения с помощью графиков, решать способом подстановки системы двух уравнений с двумя переменными, одно из которых является линейным.

Материал пункта может быть спланирован следующим образом. На первом уроке повторить основные графики, известные учащимся, затем рассмотреть примеры 1 и 2, связанные с графической иллюстрацией системы двух уравнений с двумя переменными, и перейти к выполнению упражнений из разделов **А** и **Б**, соответствующих этому материалу (упражнения **440**—**444**, **452**—**455**). Часть из них должна быть задана на дом, а часть можно оставить для заключительных уроков по теме.

На втором уроке рассматривается вопрос о степени уравнения (для случаев уравнений первой и второй степени) и решаются системы способом подстановки (примеры 3 и 4). Оставшуюся часть этого урока, а также следующий урок можно посвятить решению систем уравнений аналитическим и графическим способами, построению более сложных графиков уравнений.

На последнем уроке можно рассмотреть материал, связанный с применением аппарата систем уравнений к решению задач на координатной плоскости (текст после примера 4 и пример 5) и выполнить упражнения **450**, **451**, **464**—**466**.

В классах с невысоким уровнем подготовки целесообразно рассмотреть текст пункта, включая примеры 1—4, а также выполнить упражнения из раздела **А** и, возможно, некоторые упражнения из заданий **456**, **457**, **458**.

Комментарий к упражнениям

441—444. Упражнения нацелены на развитие умений учащихся переходить с геометрического языка на алгебраический язык и обратно, понимать геометрическую интерпретацию решения системы уравнений.

446—449. Рассматриваются системы двух уравнений, одно из которых первой, а другое — второй степени. Каждое из них решается способом подстановки, но в отдельных случаях для исключения одной из переменных можно применить способ сложения (см. упражнение **449**) или разложение на множители с последующей подстановкой в произведение значения выражения (см. упражнение **448**).

446. О т в е т: а) (–12; 1), (1; –12); б) (7; –2), (2; –7); в) (5; 7), (7; 5).

447. О т в е т: а) (2; 1), (–1; –2); б) (8; 7), (4; –1); в) (10; 1), (1; 10); г) (2; –3), (1,25; –0,75); д) (4; 3), $\left(-3\frac{1}{3};\ -4\frac{1}{3}\right)$; е) (10; –6), (–10; 6).

448. О т в е т: а) (5; –2); б) (4; 3); в) (–3; –1).

449. О т в е т:

а) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -25; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ z_1 = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1,5 \\ z_2 = 1,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_1 = -3 \\ v_1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} u_2 = -28 \\ v_2 = -5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y_1 = 3 \\ z_1 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = 22,5 \\ z_2 = -5,5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} s_1 = 2 \\ t_1 = 6, \end{cases}$ $\begin{cases} s_2 = 2\frac{1}{4} \\ t_2 = 8\frac{1}{8}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -3. \end{cases}$

450. О т в е т: а) графики пересекаются в двух точках: (3; 2) и (–1; –6); б) графики не пересекаются.

452. Каждый из графиков — это объединение двух прямых. Рассуждения аналогичны приведённым в объяснительном тексте учебника.

а) Перепишем уравнение $x^2 - y^2 = 0$ в виде $(x - y)(x + y) = 0$. Это уравнение распадается на два: $x - y = 0$ и $x + y = 0$. Графиком первого является прямая $y = x$, второго — прямая $y = -x$.

б) Объединение двух прямых $2x - y = 0$ и $2x + y = 0$. Уравнение прямых можно записать и в другом виде: $y = 2x$ и $y = -2x$.

в) Объединение двух координатных осей.

г) Объединение двух прямых $y = x$ и $y = 2x$.

д) Объединение двух прямых $y = x + 1$ и $y = 1 - x$.

е) Объединение вертикальной прямой $x = 1$ и горизонтальной прямой $y = 1$.

453. О т в е т: а) 2 решения; б) нет решений; в) 3 решения; г) 3 решения; д) 2 решения; е) нет решений.

454. а) Все точки пересечения имеют целые координаты, поэтому при аккуратном построении графиков учащиеся получат «хорошие» решения. Целесообразно предложить им подставить полученные числа в уравнения, чтобы убедиться в том, что в данном случае удалось найти точные решения.

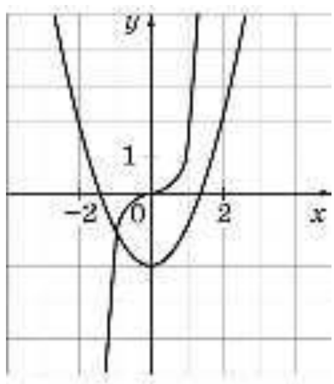

Рис. 3.3

б) Необходимо объяснить, почему других решений, кроме видимых на рисунке, нет (рис. 3.3). Объяснение может быть таким: в правой полуплоскости график функции $y = x^3$ расположен выше графика функции $y = x^2 - 2$, и так как квадратичная функция растёт медленнее, чем кубическая, то парабола «не догонит» кривую $y = x^3$.

459—463. В этих упражнениях рассматриваются некоторые специальные приёмы решения систем уравнений. Все они снабжены указаниями.

461. а) Введя замену $x + y = a$, $x - y = b$, получим систему уравнений $\begin{cases} a = 4b \\ ab = 16, \end{cases}$ которая имеет два решения: $\begin{cases} a_1 = 8 \\ b_1 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = -8 \\ b_2 = -2. \end{cases}$ Вернувшись к переменным x и y, получим системы $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = -8 \\ x - y = -2. \end{cases}$ Решив их, получим $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -3. \end{cases}$

462. а) Замена: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$.

в) Введём замену: $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$, тогда система уравнений сведётся к виду $\begin{cases} 8a + 4b = 3 \\ 2a - 4b = 2, \end{cases}$ откуда $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Имеем $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-y} = -\frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$

463. Сложив уравнения, получим $x^2 = 16$, $x = \pm 4$. Подставим $x = 4$ в первое уравнение и найдём соответствующие значения второй переменной: $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Получаем два решения системы: (4; 3) и (4; –3). Подставив $x = -4$ в первое уравнение системы, получим ещё два решения: (–4; 3) и (–4; –3).

Эта система может быть решена и способом подстановки. Выразив, например, из второго уравнения y^2, подставим в первое уравнение вместо y^2 выражение $x^2 - 7$. Получим уравнение с одной переменной $2x^2 - 7 = 25$.

б) Чтобы исключить xy, вычтем из второго уравнения первое; получим систему $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy - y = 1, \end{cases}$ которую можно решить способом подстановки. О т в е т: (2; 1).

г) Возможны различные способы решения.

Способ 1. Сложим уравнения системы, получим уравнение $2x + 2y = 4$; вычтем из первого уравнения второе, получим уравнение $2xy = -16$. Таким образом, надо решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8. \end{cases}$ Для этого можно воспользоваться способом подстановки.

Способ 2. Введём замену: $x + y = a$, $xy = b$, получим систему линейных уравнений $\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 10. \end{cases}$ Такую систему естественно решать методом сложения. Найдя пару значений a и b, вернёмся к переменным x и y.

О т в е т: (–2; 4), (4; –2).

464. Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Так как парабола проходит через точку $M(0; 1)$, то $c = 1$. Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + 1$ координаты точек $N(1;\ 0)$ и $K(3;\ 10)$, получим систему уравнений с переменными a и b: $\begin{cases} a+b+1=0 \\ 9a+3b+1=10. \end{cases}$ Её решение: $a = 2$, $b = –3$. Таким образом, уравнение параболы $y = 2x^2 – 3x + 1$.

465. 1) Сначала надо записать уравнение параболы, а затем подставить в это уравнение координаты точки M и координаты точки N. Уравнение параболы $y = –x^2 + 2x + 3$. Координаты точки M удовлетворяют этому уравнению, а координаты точки N нет.

466. 1) Например, системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2+2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2-3 \end{cases}$$

имеют соответственно одно, два, три и четыре решения. А система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2-6 \end{cases}$ решений не имеет.

2) Если $b > 0$, то система может иметь одно или два решения, а также не иметь решения.

Если $b < 0$, то система может иметь два, три или четыре решения, а также не иметь решений.

3.6. Решение задач

Методический комментарий

Цель данного пункта — расширение аппарата решения текстовых задач. Новым является характер этапа интерпретации решения системы, в котором полученные два решения во многих задачах, по сути, являются одним и тем же решением с точки зрения содержания задачи. Система упражнений содержит как традиционные задачи, решаемые с помощью систем уравнений, так и некоторые нестандартные, заставляющие неформально отнестись к интерпретации полученных решений.

Так как полное решение задачи — занятие достаточно трудоёмкое, то в ряде случаев целесообразно ограничиться составлением системы. Дальнейшая работа определяется тем, какие системы учащиеся научились решать при изучении предыдущего пункта. В классах с невысоким уровнем подготовки следует ограничиться задачами из раздела **А**.

Комментарий к упражнениям

469. Пусть все фишки разложены в x рядов, по y фишек в каждом ряду.

а) Составим систему: $\begin{cases} xy=84 \\ y-x=3. \end{cases}$ Хотя эта система имеет решения, ни одно из них не удовлетворяет условию задачи, в соответствии с которым числа должны быть целыми положительными. (Чтобы убедиться в этом, достаточно получить квадратное уравнение и найти его дискриминант.) Значит, выложить фишки таким образом невозможно.

б) Составим систему: $\begin{cases} xy = 84 \\ x - 5 = y. \end{cases}$ Решив её, получим $x_1 = 12$, $y_1 = 7$; $x_2 = -7$, $y_2 = -12$. Вторая пара чисел не удовлетворяет условию задачи, первая даёт её решение.

О т в е т: можно; 12 рядов, по 7 фишек в каждом ряду.

470—472. Задачи решаются в связке. Задачи **472** (а) и **472** (б) отличаются от задач **470** и **471** тем, что они с практической ситуацией, в которой две пары чисел, полученные в результате решения системы, определяют два решения задачи (рис. 3.4). Чтобы легче было обнаружить эти два решения, целесообразно при составлении уравнения сделать схематический рисунок, изобразив прямоугольник *ABCD* (для задачи **472** (а)), и затем ввести обозначения следующим образом: пусть x м — длина стороны *AC*, y м — длина стороны *BC*. То же самое относится и к задаче **472** (б).

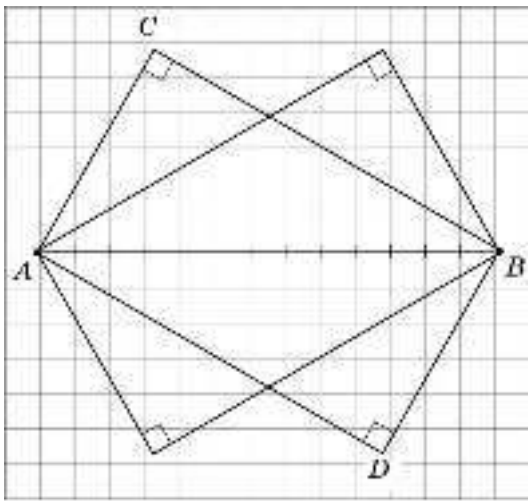

Рис. 3.4

474. Для составления системы уравнений целесообразно сделать рисунок. Пусть прямоугольная площадка имеет размеры x м и y м. Когда вокруг площадки проложили дорожку шириной 1 м, её длина и ширина увеличилась на 2 м. Имеем систему уравнений $\begin{cases} xy = 600 \\ (x+2)(y+2) = 704. \end{cases}$

476. Рисунок поможет переформулировать задачу. Нарисовав круг и вписанный в него прямоугольник, можно увидеть, что если прямоугольник вписан в круг радиуса 12,5 см, то диагональ этого прямоугольника равна 25 см. Поэтому задачу можно сформулировать так: найти стороны прямоугольника, диагональ которого равна 25 см, а площадь — 168 см^2.

Обозначим буквами x и y длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) и составим систему уравнений $\begin{cases} xy = 168 \\ x^2 + y^2 = 25^2. \end{cases}$ Если она имеет положительные решения, то ответ на вопрос задачи будет утвердительным.

Из первого уравнения выразим y и подставим его во второе уравнение. Получим биквадратное уравнение $x^4 - 625x^2 + 28\,224 = 0$, имеющее четыре корня, два из которых отрицательные и два положительные. Отрицательные решения не удовлетворяют условию задачи, поэтому возьмём два положительных корня — это 7 и 24. Если $x = 7$, то $y = 24$, если $x = 24$, то $y = 7$.

О т в е т: можно; стороны прямоугольника равны 7 см и 24 см.

477—481. Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что подобные задачи они решали с помощью составления уравнения. Теперь они могут решать их с помощью системы уравнений.

477. Пусть Коля может выполнить задание за x мин, а Миша — за y мин. Получим систему уравнений $\begin{cases} x + 6 = y \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ Её легко решить подстановкой.

478. Пусть один кран может заполнить бассейн за x мин, другой — за y мин. Составляем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{25}{x} + \dfrac{16}{y} = 1. \end{cases}$ Далее введём замену: $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{y} = b$.

479. Пусть весь каток один ученик может расчистить за x мин, другой — за y мин. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y = 40. \end{cases}$

Выразим из второго уравнения y через x: $y = 120 - 2x$. Подставим в первое уравнение вместо y выражение $120 - 2x$. После преобразований получим квадратное уравнение, имеющее два корня: 30 и 40. Система имеет два решения: если $x = 30$, то $y = 60$; если $x = 40$, то $y = 40$. Заметим, что второе решение можно было обнаружить и не составляя системы уравнений: очевидно, что если каждый из мальчиков может расчистить каток за 40 мин, то, работая по очереди, они расчистят его за 40 мин, а работая вместе — в два раза быстрее, т. е. за 20 мин.

О т в е т: два решения: за 30 мин и за 60 мин; каждый за 40 мин.

480. Пусть x км/ч — собственная скорость парохода, y км/ч — скорость течения реки. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{100}{x + y} + \dfrac{64}{x - y} = 9 \\ \dfrac{80}{x + y} + \dfrac{80}{x - y} = 9. \end{cases}$

482. Пусть скорость одного велосипедиста x км/ч, другого — y км/ч. Выразим время в часах: 30 мин = $\frac{1}{2}$ ч, 25 мин = $\frac{5}{12}$ ч. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{15}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{15}{y} - \frac{15}{x} = \frac{5}{12}. \end{cases}$

После преобразований получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{3}{y} - \frac{3}{x} = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $\begin{cases} x_1 = 18 \\ y_1 = 12 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 120 \\ y_2 = 90. \end{cases}$ Второе решение не удовлетворяет условию.

О т в е т: скорости велосипедистов 18 км/ч и 12 км/ч.

483. *Способ 1.* Обозначим буквами x и y скорости катеров (в км/ч). Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{150}{x+y} = \frac{3}{2} \\ \frac{150}{x} - \frac{150}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$ Решив систему, получим: скорость одного катера равна 40 км/ч, другого — 60 км/ч. Соответственно один был в пути 3 ч 45 мин, другой — 2 ч 30 мин.

Способ 2. Пусть первый катер был в пути x ч, а второй — y ч. Из условия можно найти скорость их сближения: 150 : 1,5 = 100 (км/ч).

Имеем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1{,}25 \\ \frac{150}{x} + \frac{150}{y} = 100. \end{cases}$ Выполнив преобразования, получим $\begin{cases} 4x - 4y = 5 \\ 3y + 3x = 2xy. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения x и подставив его во второе уравнение, получим квадратное уравнение $8y^2 - 14y - 15 = 0$, имеющее два корня: $\frac{5}{2}$ и $-\frac{3}{4}$; второй корень не удовлетворяет условию. Если $y = \frac{5}{2}$, то $x = \frac{15}{4}$.

О т в е т: первый катер был в пути 3 ч 45 мин, а второй — 2 ч 30 мин.

484. Пусть x кг — масса одного раствора, y кг — масса другого раствора. Тогда $\frac{0{,}8}{x}$ — доля кислоты в первом растворе, $\frac{0{,}6}{y}$ — доля кислоты во втором растворе.

Составим систему уравнений $\begin{cases} x+y=10 \\ \dfrac{0,8}{x}-\dfrac{0,6}{y}=\dfrac{1}{10}. \end{cases}$ Умножим обе части второго уравнения на 10. Выразив x из первого уравнения и подставив его во второе, получим уравнение $y^2 + 4y - 60 = 0$, корни которого 6 и -10 (второй корень не удовлетворяет условию). При $y = 6$ находим, что x равен 4. Теперь найдём процентное содержание кислоты в каждом растворе: $\dfrac{0,8}{4} = 0,2$, т. е. 20%; $\dfrac{0,6}{6} = 0,1$, т. е. 10%.

О т в е т: масса первого раствора 4 кг, его концентрация 20%, масса второго раствора 6 кг, его концентрация 10%.

485. *Способ 1.* Пусть масса первого куска сплава x кг, второго — y кг. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{12}{y}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{40}{100} \\ \dfrac{18}{x+y}=\dfrac{36}{100}. \end{cases}$ Решив систему, получим: масса первого куска сплава 30 кг, второго — 20 кг. Процентное содержание меди в каждом из сплавов соответственно 20% и 60%.

Способ 2. Пусть процентное содержание меди в двух кусках сплава соответственно x% и y%. Если два куска сплавить в один, то получится сплав, в котором содержится 18 кг меди, что составляет 36% всей массы сплава. Следовательно, масса сплава после соединения равна 18 : 0,36 = 50 кг.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} y-x=40 \\ \dfrac{60\cdot 100}{x}+\dfrac{12\cdot 100}{y}=50. \end{cases}$ После упрощений получим $\begin{cases} y-x=40 \\ 12y+24=xy. \end{cases}$ Выразив y из первого уравнения и подставив его во второе, получим уравнение $x^2 + 4x - 480 = 0$, корни которого 20 и -24 (второй корень не удовлетворяет условию). При $x = 20$ находим, что $y = 60$.

О т в е т: в первом сплаве содержится 20% меди, во втором — 60% меди.

3.7. Графическое исследование уравнений

Методический комментарий

Приём решения уравнений графическим способом разъясняется на примере уравнения $x^3 + x - 5 = 0$. При этом важно, что рассмотренный пример одновременно помогает мотивировать изучение графического способа решения уравнений. В тексте разбираются задачи (примеры 1 и 2), иллюстрирующие применение сформулированного приёма к решению и к исследованию уравнения. Здесь активно используются свойства изученных функций, таким образом, пункт также важен с точки зрения систематизации имеющихся знаний, иллюстрации связи алгебраического и графического языков математики. Заключительная часть пункта посвящена вопросу об уточнении корней уравнения на основе графических соображений.

Необходимо отметить, что материал довольно сложный, поэтому в классах с недостаточной подготовкой можно ограничиться вводной задачей и примером 1, а также разобрать упражнения из раздела **А**.

Комментарий к упражнениям

487. а) $x^3 - 6x - 4 = 0$; это уравнение имеет три корня. «Кандидатом» на точный корень является число –2. Убедиться в этом можно, подставив это число в уравнение. Итак, $x_1 = -2$; $x_2 \approx -0{,}5$; $x_3 \approx 2{,}6$. Заметим, что приближённые значения корней, найденные учащимися, могут несколько отличаться друг от друга.

б) $x^3 - 3x + 2 = 0$; это уравнение имеет два корня: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

488. б) $\frac{1}{2}x + 3 = x^2$; графики (см. рис. 3.22, *б* учебника) имеют две точки пересечения, абсциссы этих точек –1,5 и 2. Подставив эти значения в уравнение, получим, что найдены точные значения корней уравнения: $x_1 = -1{,}5$ и $x_2 = 2$.

490. Обратите внимание учащихся на то, что представить данное уравнение в виде $f(x) = g(x)$ можно по-разному. Например, в пункте «в» уравнение $x^2 + \frac{8}{x} - 1 = 0$ можно переписать так: $x^2 = -\frac{8}{x} + 1$, или так: $\frac{8}{x} = -x^2 + 1$, или так: $x^2 - 1 = -\frac{8}{x}$. Выбор должен определяться тем, какой вид удобнее для графического решения.

492. О т в е т: а) три корня; $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$, $2 < x_3 < 3$; б) один корень; $x \in (2; 3)$.

493. Уравнения будут иметь вид $x^2 = x + 3$; $x^2 = 2x + 2$; $x^2 = -2x + 2$; $x^2 = -\frac{1}{3}x + 1$. Для нахождения их корней следует начертить параболу $y = x^2$ и затем последовательно на этом же чертеже построить каждую из четырёх прямых.

494. а) $x = 9$. Изобразив схематически графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 12 - x$, можно увидеть, что так как первая функция возрастает, а вторая убывает, то «встретившись» один раз, графики «продолжат движение» в своих направлениях, поэтому другой общей точки у них не будет.

б) $x = -2$. Объяснение аналогично приведённому в пункте «а».

в) $x = 1$. Парабола $y = x^2 + 3$ расположена в верхней полуплоскости, поэтому она не имеет общих точек с ветвью гиперболы, расположенной в третьей координатной четверти. В первой четверти у этих графиков есть единственная точка пересечения, так как квадратичная функция на промежутке $(0; +\infty)$ возрастает, а функция $y = \frac{4}{x}$ на том же промежутке убывает.

495. Ответ 1) исключаем, так как из графических соображений понятно, что точка пересечения графиков находится в первой четверти (объяснение может быть и иным: отрицательное число не может быть корнем уравнения $\sqrt{x} = 0{,}5x - 4$).

Проверим другие ответы сравнением чисел, получающихся при подстановке концов данных промежутков в левую и правую части этого уравнения.

Ответ 2): и при $x = 0$, и при $x = 10$ значение левой части уравнения больше значения правой, следовательно, на отрезке [0; 10] графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 0{,}5x - 4$ не пересекаются.

Ответ 3): при $x = 10$ значение левой части уравнения больше значения правой, а при $x = 20$ — меньше. Следовательно, на отрезке [10; 20] графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 0{,}5x - 4$ пересекаются и, значит, корень уравнения находится в промежутке [10; 20].

Ответ: 3).

496. Ответ: [1; 2], [1; 1,5], [1,2; 1,5].

497, 498. Для решения этих задач целесообразно использовать калькулятор.

497. а) Уравнение $\sqrt{x} = x - 500$ имеет один корень. При $x = 500$ левая часть уравнения (≈ 22) больше правой (0), а при $x = 529$ левая часть уравнения (23) меньше правой (29). Это значит, что корень уравнения расположен в промежутке [500; 529]. Будем сужать этот промежуток, вычисляя и сравнивая значения левой и правой частей данного уравнения (вычисления выполняем с помощью калькулятора):

возьмём примерно середину отрезка; при $x = 515$ значение левой части уравнения ($\approx 22{,}7$) больше значения правой (15), т. е. корень уравнения расположен в промежутке [515; 529];

при $x = 520$ левая часть уравнения ($\approx 22{,}8$) больше правой (20), т. е. корень уравнения расположен в промежутке [520; 529];

при $x = 525$ левая часть уравнения ($\approx 22{,}9$) меньше правой (25), т. е. корень уравнения расположен в промежутке [520; 525];

при $x = 522$ левая часть уравнения ($\approx 22{,}85$) больше правой (22), т. е. корень уравнения расположен в промежутке [522; 525];

при $x = 523$ левая часть уравнения ($\approx 22{,}87$) меньше правой (23), т. е. корень уравнения расположен в промежутке [522; 523].

Ответ: уравнение имеет один корень в промежутке [522; 523].

3.8. Уравнения с параметром (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

В пункте формируются начальные представления об исследовании уравнения с параметром. На примере исследования квадратного уравнения показывается, что значит исследовать (или решить) уравнение с параметром. Для предупреждения формализма в знаниях учащихся и обеспечения наглядности широко используются графические представления.

Комментарий к упражнениям

502. а) Нужно рассмотреть уравнение $x^2 - 12x + c = 0$. Так как $D = 36 - c$, то это уравнение имеет два корня при $c < 36$. При любом $c < 0$ эти корни будут разных знаков.

б) $D = c^2 + 16$, т. е. $D > 0$ при любом значении c. Таким образом, при любом c это уравнение имеет два корня; так как свободный член отрицателен, то эти корни всегда имеют разные знаки.

506. Нужно выяснить, при каких значениях c система уравнений $\begin{cases} x + y = c \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ имеет одно решение, а при каких — два решения. Рассуждения аналогичны тем, которые приведены в примере 3. Ответ необходимо проиллюстрировать графически.

507. Найдём x и y из системы $\begin{cases} y = 18 - 2x \\ y = 3x + b; \end{cases}$ получим $x = \dfrac{18 - b}{5}$, $y = \dfrac{54 + 2b}{5}$. Так как точка пересечения прямых должна находиться в четвёртой четверти, потребуем выполнения условий: $x > 0$, $y < 0$. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 18 - b > 0 \\ 54 + 2b < 0. \end{cases}$ Получим, что $b < -27$.

3.9. Решение систем уравнений второй степени (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

Материал данного пункта является непосредственным развитием содержания п. 3.5 «Системы уравнений с двумя переменными». Здесь рассматриваются два примера. Первый пример — это решение системы, аналогичной той, которая подробно разбиралась при изучении вопроса о решении систем уравнений второй степени. Если время и подготовка учащихся позволяют, его полезно разобрать со всем классом. Что касается второго примера, то здесь уже требуется более изощрённая техника преобразований.

Комментарий к упражнениям

508. См. пример 1.

509. См. пример 2.

510. Заменим уравнение $x^3 + y^3 = 35$ равносильным ему уравнением $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = 35$. Подставив вместо $x + y$ число 5, получим уравнение $5^3 - 3xy \cdot 5 = 35$, т. е. $xy = 6$. Приходим к системе $\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5. \end{cases}$

511. Заменим уравнение $x^4 + y^4 = 32$ равносильным ему уравнением $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 32$. Подставив вместо $x^2 + y^2$ число 8, получим уравнение $64 - 2(xy)^2 = 32$. Откуда $(xy)^2 = 16$, т. е. $xy = \pm 4$.

Таким образом, система уравнений распалась на две более простые:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Далее см. способ решения в примере 1.

Дополнительные задания

Комментарий к упражнениям

518. а) Данное выражение равно произведению $2(1 + y^2)$. (Можно сразу вынести за скобки общий множитель $1 + y^2$.)

При $y = -\frac{3}{2}$ получим 6,5; при $y = 0{,}1$ получим 2,02; при $y = -100$ получим 20 002.

б) В результате преобразований получим выражение $-5ab$. При $a = -\frac{1}{3}$ и $b = \frac{1}{5}$ имеем $\frac{1}{3}$; при $a = 0{,}2$ и $b = 10$ имеем -10; при $a = -5$ и $b = -\frac{1}{125}$ имеем $-\frac{1}{5}$.

519. а) Заменив знак деления дробью и умножив числитель и знаменатель на xy, получим выражение $\frac{y+x}{y-x}$.

При $x = 3$ и $y = 6$ имеем $\frac{6+3}{6-3} = 3$;

при $x = -2$ и $y = 4$ имеем $\frac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3}$;

при $x = 15$ и $y = 15$ знаменатель обращается в нуль, поэтому выражение не имеет смысла;

при $x = 0{,}2$ и $y = 0{,}3$ имеем $\frac{0{,}3+0{,}2}{0{,}3-0{,}2} = 5$.

б) При $a = 4$ и $b = -1$ получим $\frac{1}{4}$; при $a = 0$ выражение не имеет смысла; при $a = 1{,}5$ и $b = 0{,}3$ получим $-\frac{1}{5}$; при $a = -16$ и $b = 16$ выражение не имеет смысла.

520. $a^2 + b^2 - 2a + 4b + 10 = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 4b + 4) + 5 = (a - 1)^2 + (b + 2)^2 + 5$.

Наименьшее значение выражение $(a - 1)^2 + (b + 2)^2 + 5$ принимает в том случае, когда $(a - 1)^2$ и $(b + 2)^2$ одновременно равны 0, т. е. при $a = 1$ и $b = -2$. Это значение равно 5.

521. Наибольшее значение дробь $\frac{1}{(a-1)^2 + (b+2)^2 + 5}$ принимает в том случае, когда её знаменатель принимает наименьшее значение, т. е. при $a = 1$ и $b = -2$.

523. б) Представим последнее произведение в виде $(x-y)^2-z^2$, а затем в получившемся выражении раскроем скобки:

$$x^2-z^2-2xy+y^2-x^2+2xy-y^2+z^2=0.$$

в) Можно, например, рассматриваемую сумму представить как разность тождественно равных выражений. Для этого достаточно каждый трёхчлен второго произведения заменить противоположным, изменив при этом знак перед произведением.

г) Преобразования можно провести различными способами. Вот один из возможных:

$$(y^2-1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)-y^6=$$
$$=(y-1)(y^2+y+1)(y+1)(y^2-y+1)-y^6=$$
$$=(y^3-1)(y^3+1)-y^6=(y^6-1)-y^6=-1.$$

527. а) Приведя к общему знаменателю левую часть равенства, получим

$$\frac{abc-a^2-abc+b^2-abc+c^2}{abc}=\frac{abc+\left(a^2-b^2-c^2\right)}{abc}.$$

По условию $a^2=b^2+c^2$, иначе $a^2-b^2-c^2=0$ и $abc\neq 0$. Поэтому далее получим $-\frac{abc+0}{abc}=-\frac{abc}{abc}=-1$.

б) Для преобразования выражения применим другой приём (им можно воспользоваться и при выполнении задания «а»):

$$\frac{bc-1}{bc}+\frac{ac-1}{ac}+\frac{ab-1}{ab}=1-\frac{1}{bc}+1-\frac{1}{ac}+1-\frac{1}{ab}=$$
$$=3-\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=3-\frac{a+b+c}{abc}.$$

Если $a+b+c=0$ и $abc\neq 0$, то $3-\frac{a+b+c}{abc}=3-\frac{0}{abc}=3$.

529. а) Для разложения на множители числителя и знаменателя каждой дроби воспользуйтесь формулой разности квадратов.

б) В каждом случае знаменатель дроби — разность квадратов, а в числителе можно вынести за скобки общий множитель.

531. Ответ показан на рисунке 3.5, *а*, *б*.

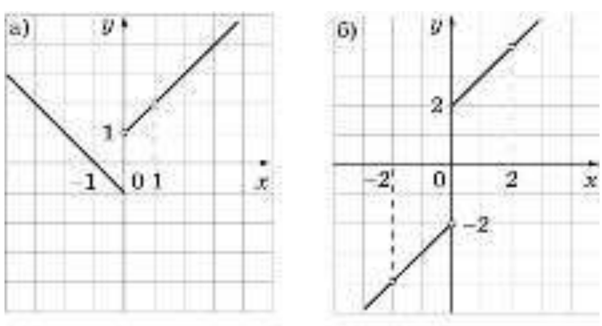

Рис. 3.5

532—535. Решение «в лоб» (т. е. раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых) потребует громоздких преобразований и может привести к уравнению, которое учащиеся не сумеют решить. Поэтому в каждом случае нужно искать рациональный приём.

532. а) В правой части уравнения стоит 0, т. е. решаем уравнение $y^2(y+1)-2y(y+1)-3(y+1)=0$. Вынесем за скобки двучлен $y+1$, получим $(y+1)(y^2-2y-3)=0$. Отсюда $y+1=0$ или $y^2-2y-3=0$.

Первое уравнение имеет корень, равный –1, а второе — корни 3 и –1. Таким образом, уравнение имеет два корня: –1 и 3.

в) Перенесём выражение $4(x-1)^2$ в левую часть уравнения и разложим её на множители:

$$(3x-2)(x-1)-4(x-1)^2=0,$$
$$(x-1)(3x-2-4x+4)=0,$$
$$(x-1)(2-x)=0,$$
$$x_1=1,\ x_2=2.$$

533. а) *Способ 1.* Сгруппируем члены уравнения в левой части и, воспользовавшись формулой разности квадратов, разложим её на множители. Получим

$$(2x-7)^2-(9-x)^2=0,$$
$$(2x-7-9+x)(2x-7+9-x)=0,$$
$$(3x-16)(x+2)=0,$$
$$x_1=5\frac{1}{3},\ x_2=-2.$$

Способ 2. Воспользуемся утверждением: $a^2=b^2$ в том и только том случае, когда $a=b$ или $a=-b$. Имеем

$$2x-7=9-x \text{ или } 2x-7=x-9,$$
$$x=5\frac{1}{3} \text{ или } x=-2.$$

Получим те же корни: $x_1=5\frac{1}{3}$, $x_2=-2$.

534. а) $(5x-2)^2+(5x+2)^2=2(5x-3)^2$,

$$(5x-2)^2+(5x+2)^2=(5x-3)^2+(5x-3)^2,$$
$$(5x-2)^2-(5x-3)^2=(5x-3)^2-(5x+2)^2,$$
$$(5x-2+5x-3)(5x-2-5x+3)=(5x-3+5x+2)(5x-3-5x-2),$$
$$10x-5=-5(10x-1),$$
$$x=\frac{1}{6}.$$

535. а) Воспользуемся утверждением: $a^2+b^2=0$ в том и только том случае, когда $a=0$ и $b=0$. Таким образом, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-5x=0 \\ x^2-25=0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x(x-5)=0 \\ x^2=25. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корни 0 и 5, второе — корни 5 и –5. Общий корень, т. е. решение системы — число 5.

О т в е т: 5.

536. 2) Уравнение третьей степени $x^2(x + 2) = 0$, т. е. $x^3 + 2x^2 = 0$. Уравнение четвёртой степени $x^3(x + 2) = 0$, т. е. $x^4 + 2x^3 = 0$.

Конечно, можно привести и другие примеры. Например, уравнение четвёртой степени с двумя корнями 0 и –2 можно получить так:

$$x(x + 2)(x^2 + 1) = 0,$$

т. е.

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x = 0.$$

537. а) *Способ 1*.

$$(x^3)^2 - 1 = 0,$$
$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0,$$
$$x^3 - 1 = 0 \text{ или } x^3 + 1 = 0,$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{ или } (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Так как квадратные уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ и $x^2 - x + 1 = 0$ корней не имеют, то исходное уравнение имеет два корня: 1 и –1.

Способ 2.

$$(x^2)^3 - 1 = 0,$$
$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0.$$

Биквадратное уравнение $x^4 + x^2 + 1 = 0$ корней не имеет, т. е. данное уравнение имеет два корня: 1 и –1.

541. а) Преобразуем сумму $x^2 + \frac{1}{x^2}$ следующим образом:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Введём замену: $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Получим уравнение $2(y^2 - 2) - 3y + 2 = 0$, отсюда $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Решив его, получим $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 2$.

Вернёмся к переменной x:

1) $x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$; $2x^2 + x + 2 = 0$; корней нет;

2) $x + \frac{1}{x} = 2$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x = 1$.

О т в е т: 1.

б) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$. Введём замену: $y = x - \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Получим уравнение $4(y^2 + 2) - 8y = 5$, откуда $4y^2 - 8y + 3 = 0$; $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$.

Теперь решим уравнения:

1) $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$, $2x^2 - 3x - 2 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$;

2) $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $x_{1,\,2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

О т в е т: –0,5; 2; $\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

542. а) Преобразуем отдельно левую и правую части уравнения, получим уравнение

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{2x-1}{(x+4)(x-5)}.$$

Отсюда $(2x - 1)(x^2 - x - 20) = (2x - 1)(x^2 - x - 6)$. Перенесём все члены уравнения в левую часть и вынесем за скобки общий множитель $2x - 1$, получим $-14(2x - 1) = 0$, откуда $2x - 1 = 0$, $x = 0{,}5$.

546. Пусть автобус и автомобиль встретились на расстоянии x км от пункта A. До пункта B автобус пройдёт $(x + 50)$ км за 3 ч, т. е. со скоростью $\frac{x+50}{3}$ км/ч, до пункта A автомобиль пройдёт x км за 1 ч 20 мин, т. е. со скоростью $\frac{3x}{4}$ км/ч. Имеем уравнение $\frac{x}{\frac{x+50}{3}}=\frac{x+50}{\frac{3x}{4}}$. Отсюда $\frac{3x}{x+50}=\frac{(x+50)\cdot 4}{3x}$.

Решив уравнение (можно использовать способ введения новой переменной: $\frac{3x}{x+50} = y$), найдём его корни: $x_1 = 100$, $x_2 = -20$.

О т в е т: 100 км/ч, 3 ч 20 мин.

547. Пусть x км — расстояние от пункта A до места встречи. Имеем уравнение $\frac{x}{\frac{5(x-14)}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{x-14}{\frac{x}{5}}$.

О т в е т: 20 км, 4 км/ч.

548. Пусть x км/ч — скорость туристов при спуске. Имеем уравнение $\frac{21}{\left(\frac{9}{x-3}+\frac{12}{x}\right)}=\frac{21}{5}$.

О т в е т: 6 км/ч.

549. Пусть x км/ч — скорость Николая при подъёме. Выразим через x время движения на пути к почте: $\frac{4}{x}+\frac{8}{2x}=\frac{8}{x}$ (ч) — и на пути от почты: $\frac{8}{x}+\frac{4}{2x}=\frac{10}{x}$ (ч). Имеем уравнение $\frac{12}{\frac{8}{x}}-\frac{12}{\frac{10}{x}}=\frac{12}{5}$.

О т в е т: 8 км/ч и 16 км/ч.

550. а) Представим первое уравнение системы в виде $(x-y)(x+y)^2=32$ и подставим в левую часть вместо $x-y$ число 2. Получим уравнение $(x+y)^2=16$. Отсюда $x+y=\pm4$.

Таким образом, исходная система «распадается» на две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решением первой системы служит пара (3; 1), решением второй — пара (–1; –3). Каждая из этих пар удовлетворяет исходной системе и других решений она не имеет.

О т в е т: (3; 1), (–1; –3).

551. а) Из первого уравнения системы следует, что $x-3y=0$ или $x+4=0$. Таким образом, данная система «распадается» на две:

$$\begin{cases} x=3y \\ x-5y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=-4 \\ x-5y=1. \end{cases}$$

554. С помощью замены $x-1=a$ и $y-2=b$ данная система сводится к системе уравнений с переменными a и b: $\begin{cases} a^2+b^2=18 \\ ab=9. \end{cases}$ Эту систему можно решить подстановкой по образцу, разобранному в примере 4 на с. 180 в объяснительном тексте учебника, а затем вернуться к переменным x и y. (Заметим, что другие способы решения таких систем разобраны в п. 3.9 учебника (рубрика «*Узнайте больше*»).

555. О т в е т: а) (3; 4), (–3; –2); б) (–6; –6), (2; 2).

Полезно продемонстрировать учащимся соответствующую графическую иллюстрацию.

556. Можно использовать графические соображения. Графиком каждого уравнения является прямая. Значит, система имеет решение при тех и только тех значениях p, при которых все три прямые имеют общую точку.

Далее план решения таков. Находим точку пересечения первых двух прямых (для чего решаем соответствующую систему) и, подставив её координаты в третье уравнение системы, находим значение p.

557. Найдём точки пересечения прямой $4x + 5y = 10$ с осями координат: (2,5; 0) — с осью x, (0; 2) — с осью y.

а) Найдём значение c, при котором прямая $2x - y = c$ проходит через точку (2,5; 0). Получим $c = 5$.

б) Найдём значение c, при котором прямая $2x - y = c$ проходит через точку (0; 2). Получим $c = -2$.

560. Пусть скорость первого велосипедиста была x км/ч, а скорость второго — y км/ч. Имеем систему $\begin{cases} (x+y)\cdot 0{,}8 = 28 \\ \dfrac{0{,}3}{x} = \dfrac{0{,}2}{y}. \end{cases}$ (Мы выразили 48 мин в часах, а 300 м и 200 м в километрах.) Эта система равносильна системе $\begin{cases} x+y=35 \\ 3x=2y. \end{cases}$ Решив её, найдём, что $x = 14$. Так как скорость первого велосипедиста была 14 км/ч, то на 28 км он затратил 2 ч.

561. Если обозначить скорость первого и второго велосипедистов (в км/ч) соответственно через x и y, то придём к системе

$$\begin{cases} \dfrac{50}{y} - \dfrac{50}{x} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

562. Пусть скорость первого мотоциклиста была x км/ч, а скорость второго — y км/ч. Так как 6 мин 40 с = $\dfrac{1}{9}$ ч, 100 м = 0,1 км и 90 м = 0,09 км, то можно записать систему

$$\begin{cases} \dfrac{100}{y} - \dfrac{100}{x} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{0{,}1}{x} = \dfrac{0{,}09}{y}. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдём, что $y = \frac{9x}{10}$. Подставив выражение для y в первое уравнение системы, получим уравнение с одной переменной

$$\frac{100 \cdot 10}{9x} - \frac{100}{x} = \frac{1}{9}.$$

Решив его, найдём, что $x = 100$.

О т в е т: 100 км/ч.

563. Пусть первоначальная стоимость первой картины была x р., а второй — y р. Запишем уравнение $0{,}8x = 1{,}2y$. Из этого уравнения найдём отношение $\frac{x}{y}$, получим $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Таким образом, первая картина была дороже, её стоимость была в 1,5 раза выше.

564. Пусть в магазин завезли x кг груш и y кг яблок. Имеем уравнение $0{,}4x = 2 \cdot 0{,}5y$. Отсюда $\frac{x}{y} = 2{,}5$. Значит, груш завезли в 2,5 раза больше, чем яблок.

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии (18 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
4.1. Числовые последовательности	2	О-22, П-42	133—140
4.2. Арифметическая прогрессия 4.3. Сумма первых n членов арифметической прогрессии	5	О-23, П-43 О-24, П-44	141—150 151—154
4.4. Геометрическая прогрессия 4.5. Сумма первых n членов геометрической прогрессии	5	О-25, П-45 О-26, П-46	155—159 160—164
4.6. Простые и сложные проценты	4	О-27, П-47	165—171
Обзор и контроль	2	«*Проверь себя*»	

Основные цели: расширить представление учащихся о числовых последовательностях; изучить свойства арифметической и геометрической прогрессий; развить умение решать задачи на проценты.

Обзор главы. Глава начинается с создания у учащихся общих представлений о последовательностях: приводятся примеры последовательностей, иллюстрирующие разные способы их задания; вводится минимально необходимый круг терминов и символов. В результате создаётся содержательная основа для осознанного изучения основного материала главы — арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметическая и геометрическая прогрессии вводятся как частные виды последовательностей, обладающие специальными свойствами. Их изучение строится по одному и тому же плану: определение, рекуррентное задание, формулы n-го члена и суммы первых n членов.

Объяснения и проводимые рассуждения сопровождаются графическими иллюстрациями; члены арифметической прогрессии изображаются точками, расположенными на прямой, члены геометрической прогрессии — точками, расположенными на экспоненте. Формулы n-го члена и суммы первых n членов прогрессий применяются для решения разнообразных содержательных задач.

Характерной особенностью темы в целом являются широта и разнообразие практических иллюстраций, акцент на связи изучаемого материала с окружающим миром. Так, введение понятий арифметической и геометрической прогрессий осуществляется на основе рассмотрения примеров из реальной жизни: стоимость проката лодки, рост колонии бактерий и др.

Завершается глава решением задач на простые и сложные проценты. Этот материал, с одной стороны, усиливает прикладной аспект темы путём демонстрации применения изученного математического аппарата для решения жизненных задач, а с другой — позволяет продолжить развитие вычислительных умений школьников, в том числе умения вычислять с применением калькулятора.

Основные виды деятельности. Применять индексные обозначения, строить речевые высказывания с использованием терминологии, связанной с понятием последовательности.

Вычислять члены последовательностей, заданных формулой n-го члена или рекуррентной формулой. Устанавливать закономерность в построении последовательности, если выписаны первые несколько её членов. Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости.

Распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания. Выводить на основе доказательных рассуждений формулы общего члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий; решать задачи с использованием этих формул.

Рассматривать примеры из реальной жизни, иллюстрирующие изменение в арифметической прогрессии, в геометрической прогрессии; изображать соответствующие зависимости графически.

Решать задачи на сложные проценты, в том числе задачи из реальной практики (с использованием калькулятора).

Комментарий к использованию ЭИ. Соответствие материалов ЭИ данной главе учебника приведено в таблице.

Учебник		**ЭИ**		
Глава	**Пункт**	**Раздел**	**Тема**	**Пункт**
4. Арифметическая и геометрическая прогрессии	4.1. Числовые последовательности	Алгебра, 7—9	6. Арифметическая и геометрическая прогрессии	6.1. Числовые последовательности
	4.2. Арифметическая прогрессия			6.2. Арифметические прогрессии
	4.4. Геометрическая прогрессия			6.3. Геометрические прогрессии

4.1. Числовые последовательности

Методический комментарий

Изучение этого пункта преследует несколько целей, каждая из которых достаточно значима. Прежде всего должна быть заложена база для осознанного и качественного изучения центральных вопросов темы — арифметической и геометрической прогрессий. Кроме того, выбранное методическое решение, предлагаемая система упражнений нацелены на развитие умений выполнять индуктивные умозаключения, подмечать закономерности и выражать их математическим языком. Наконец, здесь созданы предпосылки для расширения математического кругозора учащихся, знакомства с интересными историческими фактами, классическими задачами.

Основная учебная цель состоит в овладении учащимися небольшим кругом терминов (числовая последовательность, член последовательности, n-й член последовательности, рекуррентная формула, формула n-го члена), а также индексными обозначениями. Заметим, что согласно принятому в учебнике подходу рассмотрение формального определения числовой последовательности как функции натурального аргумента не предполагается; оно на этом этапе не является дидактически значимым и не соответствует возрастным возможностям учащихся. В то же время выполняется значительный объём содержательной практической работы с различными числовыми последовательностями, отвечающей поставленным целям.

В результате рассмотрения конкретных примеров у учащихся должны сложиться представления такого характера: мы имеем числовую последовательность (т. е. последовательность *задана*), если есть некоторое правило, с помощью которого можно один за другим выписывать члены последовательности и в принципе найти её член с любым номером. Они знакомятся с двумя важными и широко используемыми в дальнейшем *способами задания* последовательностей (т. е. способами предъявления этого правила) — с помощью рекуррентной формулы и с помощью формулы n-го члена. Необходимо подчеркнуть принципиальную разницу этих способов: чтобы, используя рекуррентную формулу, найти, к примеру, сотый член, нужно «добираться» до него, вычисляя последовательно все предыдущие члены; по формуле n-го члена сотый член последовательности вычисляется путём непосредственной подстановки в эту формулу его номера. Полезно добавить также, что последовательность можно просто *описать*, т. е. объяснить, из каких чисел и в каком порядке она строится (например, последовательность простых чисел, взятых в порядке возрастания).

Остановимся на особенностях изложения материала в учебнике. Оно начинается со знаменитой задачи о кроликах. Учащимся эту задачу можно преподнести так. В январе вам подарили пару новорождённых кроликов. Через два месяца у них рождается новая пара кроликов, в следующем месяце — ещё одна пара, и так ежемесячно. С каждой новой парой кроликов происходит то же самое. Сколько пар кроликов будет у вас в декабре, если ни одна пара не погибнет?

Задачу следует решать всем классом совместно, аккуратно изображая на доске схему по образцу, приведённому в учебнике. В результате подсчётов возникает числовая последовательность: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ... и нужно понять закономерность, по которой образуются её члены, а именно: каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Учащимся сообщается, что эту числовую последовательность называют *последовательностью Фибоначчи* по имени великого итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи), который впервые описал решение задачи о кроликах в своём труде «Книга абака», опубликованном в 1202 г. Интересно также добавить, что числа Фибоначчи нередко встречаются в природе, например их можно найти, исследуя спирали роста у многих растений.

Если же учитель посчитает решение указанной задачи и рассмотрение в качестве первого примера последовательности Фибоначчи чрезмерно трудоёмким и сложным занятием, то можно пойти по другому пути. Например, напомнить учащимся, что они уже встречались с различными числовыми последовательностями; привести несколько примеров (можно при этом дополнить примеры, приведённые в учебнике, такими, как последовательность натуральных чисел, кратных 5; последовательность целых отрицательных чисел; последовательность всех обыкновенных дробей, у которых знаменатель на 1 больше числителя и т. д.); ввести необходимые термины и обозначения. Далее можно выполнить упражнения **568** и **570** (упражнение **569** задать на дом).

После этого целесообразно рассмотреть последовательность Фибоначчи (не решая задачу о кроликах), на её примере разъяснить суть рекуррентного способа задания последовательностей и разобрать пример 1 из учебника. Усвоению этого материала будет способствовать решение упражнений **571—573**.

Затем можно перейти к заданию последовательностей формулой n-го члена (см. завершающий фрагмент в тексте данного пункта и упражнения **574—580**).

Упражнения к пункту весьма разнообразны и часто требуют от учащихся активной мыслительной деятельности. В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться упражнениями из раздела **А**, выполнив, например, такие задания: **568**, **570—573** (а, б), **577**, **578** (а, б), **579** (а, б), **580**.

Комментарий к упражнениям

568. а) Прежде всего следует выяснить, по какому правилу образуются члены последовательности. Для этого полезно, чтобы ученики изобразили, например, 6-е треугольное число (это будет соответственно сумма $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$).

Каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему номера искомого члена.

Таблица заполняется путём последовательных вычислений: $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 3 + 3 = 6$; $a_4 = 6 + 4 = 10$ и т. д.

б) $a_9 = a_8 + 9 = 36 + 9 = 45$, $a_{10} = a_9 + 10 = 45 + 10 = 55$.

Дополнительный вопрос. Найти a_{11}.

569. а)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
Число	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{19}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{23}{100}$

б) $c_{12} = \dfrac{29}{100}$.

в) $c_{40} = \dfrac{99}{100}$. Ответ можно получить не только непосредственным перебором, но и с помощью рассуждений. Последний возможный числитель — это число 99. Чтобы найти номер этого члена, рассуждаем так: в числителе не может стоять чётное число (всего имеется 49 чётных чисел, меньших 100), а также нечётное число, кратное 5 (таких чисел 10); значит, номер члена равен $99 - 49 - 10 = 40$.

570. Обратить внимание на обороты речи: «предыдущий член», «последующий член»; ввести их в активное употребление.

571. 1) Получаемые суммы (в рублях):

При I способе: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

При II способе: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

2) Если в течение одной недели, то суммы будут одинаковы; если в течение месяца, то выгоднее II способ.

3) $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 2$, где $n \geq 2$; $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, где $n \geq 3$. (Этот вопрос предлагается только после знакомства с рекуррентным способом задания.)

572. В каждом случае полезно сначала сформулировать правило, по которому строится последовательность, а потом уже задать её рекуррентно.

а) $a_1 = 64$, $a_n = a_{n-1} - 4$, $n \geq 2$; в) $x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1}$, $n \geq 2$;

б) $c_1 = 3$, $c_n = c_{n-1} + 5$, $n \geq 2$; г) $b_1 = 500$, $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{10}$, $n \geq 2$.

573. В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться заданиями «а» и «б». Важна аккуратная, подробная, последовательная запись.

в) Если $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $c_n = c_{n-2} - c_{n-1}$, то $c_3 = c_1 - c_2 = 0 - 1 = -1$; $c_4 = c_2 - c_3 = 1 - (-1) = 2$; $c_5 = c_3 - c_4 = -1 - 2 = -3$ и т. д.

В задачах **574—575** рассматриваются последовательности, которые в дальнейшем будут названы арифметической и геометрической прогрессиями. Здесь эти термины использовать не надо. Цель заданий — учить подмечать закономерность в построении последовательности, «конструировать» формулу n-го члена на основе индуктивных соображений. Иными словами, цель заданий в том, чтобы создать предпосылки для активного восприятия последующего материала.

574. Последовательными выкладками получаем $c_4 = (20 + 12 \cdot 2) + 12 = 20 + 12 \cdot 3$; $c_5 = (20 + 12 \cdot 3) + 12 = 20 + 12 \cdot 4$ и т. д.; $c_n = 20 + 12(n - 1)$.

Так как за неполный час (40 мин) владелец должен заплатить как за полный, то речь идёт о 21 часе. Имеем $c_{21} = 20 + 12 \cdot 20 = 260$.

Так как 10 суток — это 240 ч, то следует заплатить $20 + 12 \cdot 239 = 2888$ (р.).

575. Последовательными вычислениями получаем время занятий:

на 4-й день — $(10 \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}1 = 10 \cdot 1{,}1^3 \approx 13$ (мин);

на 5-й день — $(10 \cdot 1{,}1^3) \cdot 1{,}1 = 10 \cdot 1{,}1^4 \approx 15$ (мин) и т. д.;

на n-й день — $10 \cdot 1{,}1^{n-1}$ (мин).

Через 3 недели, т. е. через 21 день, длительность занятий составила $10 \cdot 1{,}1^{20} \approx 67$ (мин).

576. а) $c_n = n^2$; б) $x_n = 5n$; в) $a_n = 3 + n$; г) $b_n = \dfrac{1}{n}$; д) $y_n = \dfrac{1}{2^n}$; е) $z_n = \dfrac{n+1}{n}$.

580. а) $x_k = k^2 - k$; $x_{k+1} = k^2 + k$.

б) На этом этапе обучения естественно, чтобы учащиеся нашли номера членов, равных 56 и 110, путём последовательного вычисления 1-го, 2-го, 3-го и т. д. членов данной последовательности. Получим, что число 56 — это восьмой член последовательности, а число 110 — одиннадцатый член. Однако в сильном классе можно сказать, что есть и более рациональный путь, который состоит в решении уравнений

$n^2 - n = 56$ и $n^2 - n = 110$. Так как номер члена последовательности есть число натуральное, то отрицательные корни уравнений не подходят. Отрабатывать этот способ решения пока не следует.

581. а) 0; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$; $3\frac{3}{4}$; …; $9\frac{9}{10}$. Всего таких членов 10.

б) $z_{10} - z_9 = 9\frac{9}{10} - 8\frac{8}{9} = 1\frac{1}{90}$.

в) $z_{100} - z_{99} = 99\frac{99}{100} - 98\frac{98}{99} = 1\frac{1}{9900}$.

Так как $1\frac{1}{90} > 1\frac{1}{9900}$, то $z_{10} - z_9 > z_{100} - z_{99}$.

582. а) $y_3 = \frac{1}{9}$; $y_4 = \frac{1}{3}$; $y_5 = 1$; $y_6 = 3$; $y_7 = 9$.

б) $\frac{y_{10}}{y_9} = \frac{3^5}{3^4} = 3$; $\frac{y_{100}}{y_{99}} = \frac{3^{95}}{3^{94}} = 3$, т. е. $\frac{y_{10}}{y_9} = \frac{y_{100}}{y_{99}}$.

583. Желательно обсудить влияние выражения $(-1)^n$ на характер изменения членов последовательностей.

584. О т в е т: а) 1; –1; 1; –1; 1; –1; $a_n = (-1)^{n-1}$;

б) –5; 5; –5; 5; –5; 5; $a_n = 5 \cdot (-1)^n$.

585. а) $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$ при любом натуральном n; с увеличением n члены последовательности приближаются к числу 2, оставаясь больше 2.

б) $b = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ при любом натуральном n; с увеличением n члены последовательности приближаются к числу 2, оставаясь меньше 2.

в) $y_n = \frac{2n+(-1)^n}{n} = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$; с увеличением n модуль дроби $\frac{(-1)^n}{n}$ уменьшается, значит, сумма $2 + \frac{(-1)^n}{n}$ с увеличением n приближается к числу 2.

4.2. Арифметическая прогрессия

Методический комментарий

Особенностью изложения материала в этом пункте, как и в главе в целом, является широкое привлечение задач с реальными сюжетами. Эти задачи чрезвычайно важны; их назначение состоит в реализации прикладной направленности обучения, демонстрации связи математических понятий с человеческой практикой.

В содержании пункта можно выделить три основных смысловых блока. Первый блок — это введение понятия арифметической прогрессии. Желательно, чтобы учащиеся при ответе на вопрос о том, какую последовательность называют арифметической прогрессией, кроме воспроизведения формулировки, приведённой в учебнике, могли бы сказать и так: арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой разность между любыми двумя соседними членами равна одному и тому же числу (т. е. постоянна). При решении задач такая формулировка часто оказывается удобной. Они должны также понимать, что рекуррентную формулу, задающую арифметическую прогрессию (a_n), можно записать по-разному:

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ или } a_{n+1} - a_n = d.$$

У учащихся может возникнуть вопрос о происхождении термина «арифметическая прогрессия». Ответ на вопрос о том, почему использован термин «прогрессия», в учебнике фактически есть. Можно добавить, что члены такой последовательности всё время «прирастают» одним и тем же числом (положительным или отрицательным), т. е. «прогрессируют». А арифметической прогрессия названа потому, что каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних членов. В этом можно убедиться на конкретных примерах. Доказательство этого факта предполагается в ходе решения задачи-исследования (упражнение **611**).

В результате изучения материала учащиеся должны знать определение арифметической прогрессии и уметь её распознавать; уметь находить разность прогрессии, зная любые два соседних её члена; уметь последовательно выписывать члены прогрессии, двигаясь как в направлении возрастания номеров, так и в обратном порядке. Для достижения этих целей предназначены упражнения **586**—**591** из раздела **А**, при решении которых требуется лишь знание определения арифметической прогрессии.

Следующий важный блок в теории — это получение формулы n-го члена арифметической прогрессии. Основные типичные случаи применения формулы n-го члена арифметической прогрессии разобраны в примерах 1—3. При этом главная задача, которую, безусловно, должен научиться решать каждый ученик, — это нахождение любого члена заданной арифметической прогрессии по его номеру (см. пример 1). Для отработки умения применять указанную формулу следует использовать прежде всего задания **593**—**597**.

Наконец, в последнем блоке теоретической части пункта рассматривается вопрос о взаимосвязи арифметической прогрессии и линейной функции. Если учитель не сочтёт возможным дать этот материал в полном объёме, можно ограничиться рассмотрением конкретных примеров из текста без проведения доказательств в общем виде (а в слабом классе достаточно разобрать только первый пример).

В классах с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться упражнениями из раздела **А**, и прежде всего теми, которые были указаны выше.

Комментарий к упражнениям

Упражнения **586—591** выполняются после знакомства с определением арифметической прогрессии.

586. Предполагается такое решение: сначала записывается последовательность чисел, о которой спрашивается в задаче; затем на основе определения выясняется, является ли эта последовательность арифметической прогрессией.

а) Это арифметическая прогрессия; $d = -6$.

б) Это не арифметическая прогрессия, так как разность между соседними членами непостоянна. (Увидеть, что эта последовательность не арифметическая прогрессия, учащиеся могут, указав первые три её члена.)

В упражнениях **587—591** следует дополнительно давать характеристику каждой прогрессии, указывая, какой она является — возрастающей или убывающей.

589. Вписали 6 членов.

590. Отрицательными являются первые три члена.

591. Положительных членов 7; начиная с восьмого, члены прогрессии отрицательны.

592. а) $a_1 = -14$, $d = -9 - (-14) = 5$. (Обратить внимание учащихся на то, что $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ и т. д. Предупредить ошибку типа: $d = a_1 - a_2$.)

Далее можно действовать по-разному:

1) Записать формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ и подставить в неё значения a_1, d и n; например, $a_{15} = -14 + 5 \cdot 14 = 56$.

2) Составить и упростить формулу n-го члена данной прогрессии, а затем по этой формуле найти нужный член прогрессии; например: $a_n = -14 + 5(n - 1) = -19 + 5n$; $a_{15} = -19 + 5 \cdot 14 = 56$.

599. а) $h_n = 8000 - 500n$.

б) Через 3 мин самолёт будет на высоте $8000 - 500 \cdot 3 = 6500$ м; через 8 мин самолёт будет на высоте $8000 - 500 \cdot 8 = 4000$ м.

в) Так как на высоте 4000 м самолёт оказался через 8 мин после начала снижения, то ниже 4000 м он окажется на 9-й минуте.

601. а) Задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} a_1 + 14d = 5 \\ a_1 + 39d = 40. \end{cases}$ Получаем $a_1 = -93$, $d = 7$.

602. Можно рассуждать так:

а) $a_{10} = a_1 + 9d = (a_1 + 2d) + 7d = a_3 + 7d$;

б) $a_7 = a_1 + 6d = (a_1 + 9d) - 3d = a_{10} - 3d$;

в) $a_{n+2} = a_1 + d(n + 1) = (a_1 + d(n - 1)) + 2d = a_n + 2d$.

603. *Способ 1.* Из системы уравнений $\begin{cases} b_1 + 2d = 10 \\ b_1 + 9d = 12{,}1 \end{cases}$ найдём, что $d = 0{,}3$. Далее последовательными вычислениями находим: $b_4 = 10 + 0{,}3 = 10{,}3$; $b_5 = = 10{,}6$; …; $b_9 = 11{,}8$.

Способ 2. Выразим b_{10} через b_3 и d: $b_{10} = b_3 + 7d$. Отсюда найдём, что $d = 0{,}3$. Далее см. способ 1.

604. а) Так как между числами 6 и 30 нужно вставить пять чисел, то мы имеем арифметическую прогрессию, содержащую 7 членов; $a_1 = 6$, $a_7 = 30$. Из равенства $a_7 = a_1 + 6d$ найдём, что $d = 4$.

О т в е т: 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30.

605. Найдём разность прогрессии: $d = -96 - (-101) = 5$. Запишем формулу n-го члена:

$$a_n = -101 + 5(n - 1) = 5n - 106.$$

Выясним, при каких натуральных значениях n выражение $5n - 106$ принимает положительные значения. Для этого решим неравенство $5n - 106 > 0$, получим $n > 21\frac{1}{5}$, т. е. $n \geq 22$. Таким образом, начиная с 22-го члена, члены данной прогрессии положительны.

Чтобы убедиться в правильности ответа, можно по формуле $a_n = 5n - 106$ вычислить a_{21} и a_{22}: $a_{21} = 105 - 106 = -1 < 0$; $a_{22} = 110 - 106 = 4 > 0$.

609. Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия и её разность равна d. Найдём разность двух произвольных её членов, номера которых отличаются на 2, т. е. взятых через один:

$$a_{n+2} - a_n = (a_1 + d(n+1)) - (a_1 + d(n-1)) =$$
$$= a_1 + dn + d - a_1 - dn + d = 2d.$$

Таким образом, разность между членами данной прогрессии, взятыми через один, постоянна, значит, они также образуют арифметическую прогрессию.

610. а) Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия и c — произвольное число. Докажем, что последовательность (b_n), в которой $b_1 = a_1 + c$, $b_2 = a_2 + c$, …, $b_n = a_n + c$, также является арифметической прогрессией. Для этого рассмотрим разность $b_{n+1} - b_n$. Получим

$$b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + c) - (a_n + c) = a_{n+1} - a_n = d,$$

т. е. разность $b_{n+1} - b_n$ постоянна.

611. 2) Надо доказать, что если (a_n) — арифметическая прогрессия, то при $n > 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Доказательство. Так как (a_n) — арифметическая прогрессия, то $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, т. е. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ и $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

3) а) Воспользуемся доказанным выше свойством и найдём a_3: $a_3 = \dfrac{12 + 18}{2} = 15$. Теперь можно найти d: $d = 15 - 12 = 3$. Далее, $a_1 = 12 - 3 = 9$; $a_5 = 18 + 3 = 21$; $a_6 = 21 + 3 = 24$.

Заметим, что, зная a_2 и a_4, можно было бы сразу найти d.

4.3. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии

Методический комментарий

В пункте рассматриваются две формулы для нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{и} \quad S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

Вывод первой формулы опирается на свойство, заключающееся в том, что в конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от концов, одинаковы, т. е. если прогрессия содержит n членов, то

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots .$$

В учебнике для простоты изложения в явном виде это свойство не сформулировано. Но в сильном классе это можно сделать. Можно даже сформулировать и доказать более общее утверждение: если (a_n) — арифметическая прогрессия и натуральные числа i, j, k и l таковы, что $i + j = k + l$, то $a_i + a_j = a_k + a_l$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ вместо n подставить i, j, k и l, найти суммы $a_i + a_j$ и $a_k + a_l$ и сопоставить результаты.

Вторую формулу суммы учащиеся могут вывести самостоятельно. Желательно, чтобы каждый ученик приобрёл некоторый опыт использования обеих формул. В то же время требовать от учащихся запоминания второй формулы, структура которой довольно сложна, нецелесообразно. Более того, имеет смысл на протяжении всего времени изучения темы позволить учащимся пользоваться справочным материалом или вывесить в классе плакат с полным набором изученных формул. Основная задача состоит не в выучивании формул, а в умении применять их при решении задач.

Система упражнений к пункту весьма разнообразна. Она содержит задания от достаточно простых, на прямое применение изученных формул, до весьма сложных, требующих свободного владения алгебраическим аппаратом (умения решать линейные и квадратные уравнения и неравенства, системы уравнений). Значительное место среди упражнений занимают задачи практического характера, задачи с геометрическими сюжетами.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем прежде всего остановиться на упражнениях **612**, **614**, **615—619**, **621** из раздела **А**, а также на некоторых упражнениях из раздела **Б**, например **623** (в, г), **625** (а), **627**.

Комментарий к упражнениям

612. а) Можно предложить вычислить сумму дважды, воспользовавшись разными формулами.

Способ 1. $a_1 = 0{,}2$, $d = 0{,}3$, $a_{10} = 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 9 = 2{,}9$,

$$S_{10} = \frac{(0{,}2 + 2{,}9) \cdot 10}{2} = 15{,}5.$$

Способ 2. $a_1 = 0{,}2$, $d = 0{,}3$,

$$S_{10} = \frac{(2 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 9) \cdot 10}{2} = 15{,}5.$$

614. б) $a_1 = 1$, $a_n = n$, число слагаемых также равно n. Имеем

$$S_n = \frac{(1 + n)n}{2}, \text{ т. е. } S_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Эту красивую формулу полезно запомнить или внести в справочник.

615. а) $S_{1500} = 1\,125\,750$.

б) Нужно найти значение n, при котором значение выражения $\frac{n(n + 1)}{2}$ равно 210. Для этого решим уравнение $\frac{n(n + 1)}{2} = 210$. Получим $n_1 = 20$, $n_2 = -21$.

Таким образом, сумма, равная 210, получится при сложении первых двадцати натуральных чисел.

616. а) Треугольник под номером 25 состоит из 25 рядов, содержащих соответственно 1, 2, 3, …, 25 шаров. Иными словами, нужно найти сумму 1 + 2 + 3 + … + 25. Получим $\frac{25 \cdot 26}{2} = 325$.

618. О т в е т: 800 мест.

619. На «языке прогрессий» задача звучит так: в арифметической прогрессии (a_n) $n = 15$, $d = 2$, $a_{15} = 35$; требуется найти a_1 и S_{15}.

Подставив в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ значения a_n, d и n, найдём a_1: $35 = a_1 + 2 \cdot 14$, $a_1 = 7$.

Теперь найдём S_{15}: $S_{15} = \frac{(7 + 35) \cdot 15}{2} = 315$.

620. Время (в мин), которое ежедневно проводит на улице ребёнок, составляет арифметическую прогрессию. Известно, что $a_1 = 20$, $d = 10$, $a_n = 120$. Нужно найти n и S_n.

О т в е т: $n = 11$, т. е. 2 ч ребёнок будет на улице на 11-й день; $S_{11} = 770$ мин = 12 ч 50 мин — такое время проведёт ребёнок на улице за 11 дней.

621. а) $a_1 = 8$, $a_{10} = 35$, $S_{10} = \frac{(8 + 35) \cdot 10}{2} = 215$;

в) $a_1 = 8$, $a_n = 3n + 5$, $S_n = \frac{(8 + (3n + 5)) \cdot n}{2} = \frac{3n^2 + 13n}{2}$.

Мы получили формулу суммы первых n членов данной арифметической прогрессии. Можно предложить найти по этой формуле S_{10} и S_{20} и убедиться, что будут получены те же результаты.

Одна из главных проблем, возникающих при решении задач **623—626**, состоит в определении числа слагаемых.

623. а) Нужно найти сумму членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 45$, $a_n = 90$ и $n = 90 - 44 = 46$. Получим $S_{46} = \frac{(45 + 90) \cdot 46}{2} = 3105$.

Учащиеся могут предложить другое естественное решение: найти сумму натуральных чисел от 1 до 90, затем сумму натуральных чисел от 1 до 44, и из первого результата вычесть второй; при этом можно пользоваться известной формулой суммы первых n натуральных чисел: $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

б) Можно рассмотреть арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = -100$, $a_n = -65$ и $n = 100 - 64 = 36$.

Удобнее, однако, найти сумму натуральных чисел от 65 до 100 и взять её с противоположным знаком.

О т в е т: –2970.

в) $a_1 = 10$, $a_n = 99$, $n = 99 - 9 = 90$,

$$S_n = \frac{(10 + 99) \cdot 90}{2} = 4905.$$

624. Предварительно целесообразно поговорить с учащимися о том, что в натуральном ряду нечётные и чётные числа чередуются; среди ста первых натуральных чисел 50 нечётных и 50 чётных; если взять, например, 88 натуральных чисел, то среди них 44 нечётных и 44 чётных; а если взять 37 натуральных чисел, то нечётных среди них будет 19, а чётных — 18. Такая беседа позволит легко находить число слагаемых в рассматриваемых суммах.

а) $a_1 = 30$, $a_n = 98$, $n = 49 - 14 = 35$,

$$S_n = \frac{(30 + 98) \cdot 35}{2} = 2240;$$

б) $a_1 = 15$, $a_n = 85$, $n = 43 - 7 = 36$,

$$S_n = \frac{(15 + 85) \cdot 36}{2} = 1800.$$

Заметим, что число слагаемых можно находить и по формуле n-го члена прогрессии. Так, в случае «а», подставив в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ значения $a_1 = 30$, $a_n = 98$, $d = 2$, получим $98 = 30 + 2(n - 1)$, откуда найдём, что $n = 35$.

625. а), б). См. пример 3 в тексте.

в) Сначала найдём сумму всех двузначных чисел, т. е. сумму $10 + 11 + \ldots + 99$, затем — сумму всех двузначных чисел, делящихся на 6, т. е. $12 + 18 + \ldots + 96$, и из первого результата вычтем второй.

О т в е т: а) 945; б) 32 850; в) 4095.

626. а) Дана арифметическая прогрессия (a_n): 3; 6; 9; …; 120. В этой прогрессии $a_1 = 3$, $a_n = 120$, $d = 3$. Из формулы $a_n = a_1 + d(n - 1)$ найдём n: $120 = 3 + 3(n - 1)$, $n = 40$. Далее, $S_{40} = \dfrac{(3 + 120) \cdot 40}{2} = 2460$.

б) Рассматривается прогрессия 52; 56; …; 148; $a_1 = 52$, $a_n = 148$, $d = 4$. Находим, что $n = 25$; $S_{25} = 2500$.

в) Решать по плану, рассмотренному в задании **625** (в).

627. Следует вернуться к рисунку 4.2 учебника и вспомнить, как образуются треугольные числа; очевидно, что n-е треугольное число равно сумме $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

а) В основании пирамиды треугольник, соответствующий 8-му треугольному числу, поэтому число шаров, из которых он сложен, равно сумме

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = \frac{(1 + 8) \cdot 8}{2} = 36.$$

б) Найдём число шаров, из которых составлены каждый из восьми треугольников, образующих пирамиду. Получим последовательность: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36. Это не арифметическая прогрессия, поэтому сумму её членов найдём простым сложением. Всего в пирамиде 120 шаров.

628. В каждом следующем поясе на 6 кругов больше, чем в предыдущем.

б) Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$, $d = 6$, $a_n = 126$ (шар в центре мы исключаем). Воспользовавшись формулой $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n - 1))n}{2}$, получим уравнение с переменной n: $\frac{(2 \cdot 6 + 6(n-1))n}{2} = 126$. Оно сводится к квадратному $n^2 + n - 42 = 0$, имеющему корни $n_1 = 6$ и $n_1 = -7$. Значит, в шестиугольнике 6 поясов.

629. Площади столбцов (в кв. ед.) образуют последовательность нечётных чисел: 1; 3; 5; …; $a_n = 2n - 1$.

О т в е т: а) 64; 10 000; n^2; б) 10 столбцов.

630. Еженедельные дистанции (в км) составляют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 2$ и $a_{11} = 4$. Подставив в формулу $a_{11} = a_1 + d(n-1)$ значения a_1 и a_{11}, получим уравнение $4 = 2 + d \cdot 10$, откуда найдём, что $d = 0{,}2$. Таким образом, еженедельно Игорь должен увеличивать дистанцию на 0,2 км. В неделе 7 дней, поэтому за 11 недель Игорь пробежит расстояние, равное

$$2 \cdot 7 + 2{,}2 \cdot 7 + 2{,}4 \cdot 7 + ... + 4 \cdot 7 =$$

$$= (2 + 2{,}2 + 2{,}4 + \ldots + 4) \cdot 7 = \frac{(2+4) \cdot 11}{2} \cdot 7 = 231 \text{ (км)}.$$

632. а) *Способ 1.*

$$S_{19} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 18) \cdot 19}{2} = 779; \quad S_{30} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 29) \cdot 30}{2} = 1890;$$

$$S_{30} - S_{19} = 1890 - 779 = 1111.$$

Способ 2. $a_{20} = 5 + 4 \cdot 19 = 81$; $a_{30} = 5 + 4 \cdot 29 = 121$; искомая сумма равна значению выражения

$$\frac{(81 + 121) \cdot 11}{2} = 1111.$$

633. а) Решив систему уравнений $\begin{cases} b_1 + 5d = 20 \\ b_1 + 9d = 18, \end{cases}$ найдём, что $b_1 = 22{,}5$, $d = -0{,}5$. Далее воспользуемся второй формулой суммы арифметической прогрессии.

О т в е т: 355.

б) О т в е т: 1050.

634. Сначала найдём число положительных членов данной прогрессии. Для этого решим неравенство $4{,}6 - 0{,}4(n-1) > 0$. Получим $n < 12{,}5$, т. е. всего в прогрессии 12 положительных членов.

Таким образом, $a_1 = 4{,}6$, $d = -0{,}4$, $n = 12$,

$$S_{12} = \frac{(2 \cdot 4{,}6 - 0{,}4 \cdot 11) \cdot 12}{2} = 28{,}8.$$

636. Натуральные числа, кратные 5, образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 5$, $a_n = 5n$. Найдём число слагаемых n, при котором $S_n > 275$. Для этого решим неравенство $\frac{(5 + 5n)n}{2} > 275$, т. е. $n^2 + n - 110 > 0$. Неравенство выполняется, если $n < -11$ и $n > 10$. Отрицательные значения n не подходят, поэтому рассматриваем условие $n > 10$. Откуда следует, что сложить нужно 11 чисел.

637. Обратите внимание учащихся на то, что в задаче, по сути, требуется получить формулы суммы первых n чётных натуральных чисел и первых n нечётных натуральных чисел.

а) $S_n = \dfrac{(2 + 2n)n}{2} = n(n + 1)$; б) $S_n = \dfrac{(1 + (2n - 1))n}{2} = n^2$.

638. Пусть первое число равно a_1 и разность прогрессии равна d, тогда $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 100$, т. е. $2a_1 + 3d = 50$. Получили уравнение с двумя переменными и будем искать пары натуральных чисел (a_1; d), удовлетворяющих этому уравнению. Запишем уравнение в виде $a_1 = \dfrac{50 - 3d}{2}$. Методом перебора получим 4 пары значений d и a_1: 1) $d = 2$, $a_1 = 22$; 2) $d = 6$, $a_1 = 16$; 3) $d = 10$, $a_1 = 10$; 4) $d = 14$, $a_1 = 4$.

Таким образом, задача имеет 4 решения: 1) 22; 24; 26; 28; 2) 16; 22; 28; 34; 3) 10; 20; 30; 40; 4) 4; 18; 32; 46.

4.4. Геометрическая прогрессия

Методический комментарий

Изучение геометрической прогрессии строится по тому же плану, что и изучение арифметической прогрессии: формулируется определение геометрической прогрессии, вводятся соответствующие термины и обозначения; записывается рекуррентная формула, с помощью которой задаётся геометрическая прогрессия; путём индуктивных рассуждений получается формула n-го члена геометрической прогрессии; рассматривается решение некоторых типовых задач с использованием этой формулы, решаются задачи с практическим содержанием.

Используя рассматриваемые примеры геометрических прогрессий, можно пояснить учащимся происхождение прилагательного «геометрическая»: каждый член прогрессии с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних членов, т. е. $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Доказательство этого факта предполагается в ходе решения задачи-исследования **663**.

Обязательно нужно сопоставить характер изменения двух прогрессий. Арифметическая прогрессия изменяется (растёт или убывает) равномерно; геометрически это выражается в том, что точки, изображающие её члены на координатной плоскости, лежат на прямой. Геометрическая прогрессия меняется неравномерно; при $b_1 > 0$ и $q > 1$ её члены растут очень быстро и изображающие их точки координатной плоскости лежат на кривой (экспоненте), которая круто «уходит вверх». Подчеркнуть принципиальную разницу в характере изменения двух прогрессий можно при рассмотрении вводного примера в тексте учебника, а также при решении таких задач, как упражнения **642**, **649**, **650**.

Если уровень подготовки класса позволяет, то учащихся можно познакомить со следующим интересным фактом: от свойств арифметической прогрессии можно перейти к аналогичным свойствам геометрической прогрессии с положительными членами, если сложение и вычитание заменить соответственно умножением и делением, а умножение и деление — возведением в степень и извлечением корня. В учебнике об этом сказано в связи с формулами n-х членов двух прогрессий. Заметим, что указанная идея принадлежит шотландскому математику Джону Неперу (1550—1617).

В результате изучения пункта учащиеся должны знать определение геометрической прогрессии и уметь её распознавать; уметь находить знаменатель прогрессии, зная любые два соседних её члена; уметь последовательно выписывать члены прогрессии, двигаясь как в направлении возрастания номеров, так и в обратном порядке; знать формулу n-го члена геометрической прогрессии и уметь пользоваться ею для нахождения члена по указанному номеру. (Заметим, что обратную задачу — определение номера члена, равного заданному числу, — учащиеся могут решить лишь в самых простых случаях, например, определить, какой номер имеет член геометрической прогрессии, равный 16, если её первый член равен $\frac{1}{4}$, знаменатель равен 2.)

При решении задач к пункту от учащихся потребуется свободное умение выполнять действия со степенями, в том числе с буквенными показателями. Для восстановления навыков рекомендуем систематически использовать *устные упражнения*. Например:

1) а) Представьте в виде степени с основанием 2 число $64;\ 128;\ 1024;\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{32}$.

б) Представьте в виде степени с основанием 3 число $81;\ 243;\ \frac{1}{27}$.

2) Вычислите: а) $125 \cdot 5^{-4}$; б) $100^3 \cdot 10^{-8}$; в) $16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$; г) $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$.

Заметим, что всюду, где это целесообразно, следует пользоваться калькулятором. В классе с невысоким уровнем подготовки можно ограничиться решением задач из раздела **А**. Из раздела **Б** можно разобрать упражнения **653** и **657**.

Комментарий к упражнениям

Задачи **639—643** решаются на основе определения геометрической прогрессии.

641. а) …; 3125; 625; 125; 25; 5; …;

б) …; 5; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$; … .

642. В строке «Андрей» должна быть геометрическая прогрессия; $q = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. В строке «Борис» — арифметическая прогрессия; $d = 24 - 16 = 8$. Обратите внимание на то, что первые два члена прогрессий совпадают, а дальше геометрическая прогрессия растёт быстрее арифметической.

Задачи **644—645** направлены на понимание и применение формул, с помощью которых может быть задана геометрическая прогрессия. К ним примыкает упражнение **653** (раздел **Б**), его можно выполнять вслед за указанными.

644. а) Рекуррентным способом последовательность задаётся так: $b_1 = -4$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$. Формула n-го члена: $b_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2^2 \cdot 2^{1-n} = -2^{3-n}$.

б) Рекуррентный способ задания: $b_1 = 0{,}001$, $b_{n+1} = -10b_n$. Формула n-го члена: $b_n = 0{,}001 \cdot (-10)^{n-1} = 10^{-3} \cdot (-10)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 10^{n-4}$.

Заметим, что слабым учащимся можно разрешить ограничиться выписыванием первых членов прогрессии.

645. Решается на основе формулы n-го члена геометрической прогрессии.

а) Подставим в формулу $y_n = y_1 \cdot q^{n-1}$ значения $y_1 = \frac{1}{81}$, $q = 3$ и $n = 8$. Получим $y_8 = \frac{1}{81} \cdot 3^7 = 3^{-4} \cdot 3^7 = 3^3 = 27$.

Назначение упражнений **646—651 —** применение формулы n-го члена геометрической прогрессии и её определения для решения задач с практическим сюжетом.

646. Числа, показывающие, сколько наборов выпускала фирма в 1-й, 2-й и т. д. годы, образуют геометрическую прогрессию; $b_1 = 2000$, $q = 1{,}5$. Найдём b_5:

$$b_5 = 2000 \cdot 1{,}5^4 = 2000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 10\,125.$$

647. б) В геометрической прогрессии известны $b_6 = 12\,800$ и $q = 2$. Нужно найти b_1. Из уравнения $12\,800 = b_1 \cdot 2^5$ получим $b_1 = 12\,800 : 32 = 400$.

648. а) Имеем геометрическую прогрессию, в которой $b_1 = 250$ и $q = \frac{4}{5}$. Высота, на которой окажется мяч после пятого удара, — пятый член этой прогрессии. Получим

$$b_5 = 250 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{5^3 \cdot 2 \cdot 2^8}{5^4} = 102{,}4 \text{ (см)} \approx 1 \text{ м}.$$

б) Число 64 — четвёртый член геометрической прогрессии. Из уравнения $64 = b_1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$ найдём, что $b_1 = 125$ см.

649. а) Деньги, которые решил откладывать ученик, составляют геометрическую прогрессию, в которой $b_1 = 1$, $q = 2$. Тогда $b_{31} = 1 \cdot 2^{30} = (2^{10})^3 = (1024)^3 =$ $= 1\,073\,741\,824$ (к.), т. е. ученику 31 декабря пришлось бы положить в копилку 10 737 418 р. 24 к.

б) Теперь речь идёт об арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $d = 10$. В этом случае $a_{31} = 1 + 10 \cdot 30 = 301$ (к.), т. е. 31 декабря в копилку пришлось бы положить 3 р. 1 к.

Дополнительное задание. Чтобы подчеркнуть разницу в скорости возрастания геометрической и арифметической прогрессий, можно после решения задания б) предложить учащимся решить ту же задачу в случае, если ежедневно в копилку будет поступать 1 р., 10 р.

651. а) Каждый следующий член последовательности получается умножением предыдущего на одно и то же число, а именно на $\frac{4}{5}$.

в) $b_n = 50 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Дополнительное задание. Покажите, что эту формулу можно представить в виде $b_n = 62{,}5 \cdot (0{,}8)^n$.

653. а) $q = \sqrt{2}$, $b_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$ или $b_n = (\sqrt{2})^{n+1}$.

654. Каждый следующий треугольник образован средними линиями предыдущего. Имеем геометрическую прогрессию, в которой $q = \frac{1}{2}$.

а) $P_8 = P_1 \cdot q^7 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2}$ (см).

б) Ответ на вопрос несложно получить последовательными вычислениями:

$$P_1 = 64,\quad P_2 = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32,\quad P_3 = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16,$$

$$P_4 = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8,\quad P_5 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Таким образом, периметр пятого треугольника равен 4 см.

Но можно и воспользоваться формулой n-го члена:

$$4 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4;\ n - 1 = 4;\ n = 5.$$

655. $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{2}$. Фигуры с нечётными номерами — прямоугольники, а с чётными — ромбы.

а) Ромб. Подставим в формулу $S_n = S_1 \cdot q^{n-1}$ значения $n = 8$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{3}{4}$ и найдём S_1:

$$\frac{3}{4} = S_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7,\ S_1 = \frac{3}{4} \cdot 2^7 = 96\ (\text{см}^2).$$

б) $S_1 = 96$, $q = \frac{1}{2}$. Будем последовательно вычислять члены прогрессии: 96; 48; 24; 12; 6. Значит, 6 см^2 — это площадь пятого четырёхугольника; он является прямоугольником. Можно также воспользоваться формулой n-го члена.

656. а) Из геометрических соображений ясно, что площадь каждого следующего квадрата равна половине площади предыдущего квадрата. Значит, последовательность площадей (S_n) — геометрическая прогрессия, $q = \frac{1}{2}$. Формула n-го члена: $S_n = 144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

б) Сторона каждого следующего квадрата равна половине диагонали предыдущего квадрата. Если сторона квадрата равна *a,* то его диагональ равна $a\sqrt{2}$ и сторона следующего квадрата равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отношение стороны следующего квадрата к стороне предыдущего равно $\frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как это отношение постоянно, то длины сторон квадратов образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Она начинается так: 12; $6\sqrt{2}$; 6; $3\sqrt{2}$; 3; ... . Формула *n*-го члена этой прогрессии: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Её можно записать в таком виде: $a_n = \frac{12}{(\sqrt{2})^{n-1}}$.

657. О т в е т: а) 81; б) $-\frac{1}{64}$.

658. а) Воспользовавшись тем, что $y_6 = y_3 \cdot q^3$, найдём, что $q^3 = y_6 : y_3 = -125$, значит, $q = -5$. Первые шесть членов прогрессии: 1; –5; 25; –125; 625; –3125.

б) $q = \frac{1}{10}$. Первые пять членов прогрессии:

$$100;\ 10;\ 1;\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{100}.$$

659. а) Так как $q^2 = b_5 : b_3 = \frac{1}{100}$, то получаем два значения q: $q_1 = \frac{1}{10}$, $q_2 = -\frac{1}{10}$. Задача имеет два решения: если $q = \frac{1}{10}$, то имеем прогрессию 10^9; 10^8; 10^7; 10^6; 10^5; ...; если $q = -\frac{1}{10}$, то имеем прогрессию 10^9; -10^8; 10^7; -10^6; 10^5; ... .

660. а) На «языке прогрессий» задача звучит так: $b_1 = 3$, $b_5 = 27$; найти b_2, b_3 и b_4. Используя равенство $b_5 = b_1 \cdot q^4$, находим, что $q^4 = 9$, значит, $q = \sqrt{3}$ или $q = -\sqrt{3}$.

Задача имеет два решения: 1) 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$; 27; 2) 3; $-3\sqrt{3}$; 9; $-9\sqrt{3}$; 27.

661. а) Задание можно конкретизировать примером. Пусть $x = 2$, тогда имеем последовательность: 2; 2^2; 2^3; ... . Это геометрическая прогрессия, $q = x$.

б) Арифметическая прогрессия; $d = 1$.

в) Арифметическая прогрессия; $d = x$.

г) Геометрическая прогрессия; $q = a$.

662. а) Нет. Для доказательства приведём контрпример. Так, последовательность 1; 2; 4; 8; 16; ... — геометрическая прогрессия, а последовательность 2; 3; 5; 9; 17; ... (каждый её член получается прибавлением к соответствующему члену первой последовательности числа 1) таковой не является.

б) Да. Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Это означает, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, где q — некоторое число, отличное от 0. Но тогда отношение $\frac{c \cdot b_{n+1}}{c \cdot b_n}$ также равно q, т. е. последовательность, каждый член которой получается умножением членов последовательности (b_n) на одно и то же число $c \neq 0$, также является геометрической прогрессией, причём с тем же знаменателем.

663. 2) Так как последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, то $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, где n — любое натуральное число, большее 1. Отсюда $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, а так как члены прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ при любом натуральном n, большем 1.

3) а) Из условия следует, что члены прогрессии — числа положительные. Так как $b_3 = \sqrt{b_2 \cdot b_4}$, то $b_3 = \sqrt{6 \cdot 54} = 18$. Отсюда $q = \frac{18}{6} = 3$. Значит, $b_1 = 2$, $b_5 = 162$, $b_6 = 486$.

б) О т в е т: $b_2 = 9\sqrt{3}$, $b_6 = 81\sqrt{3}$, $b_8 = 243\sqrt{3}$.

4.5. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии

Методический комментарий

Логика построения этого пункта та же, что и для суммы первых n членов арифметической прогрессии. Также для стимулирования интереса, обеспечения мотивации рассматривается классическая задача, в ходе решения которой разъясняется суть приёма, применяемого для вывода формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии. Затем выводится формула и рассматриваются задачи на применение этой формулы, в том числе задача с практическим сюжетом (см. примеры 1—3). Эти задачи предъявляют уровень сложности упражнений, которого целесообразно придерживаться в работе со всеми учащимися.

Вообще говоря, вычисления с применением рассмотренной формулы, как правило, трудоёмки и громоздки, они требуют определённого владения техникой преобразования числовых выражений (но одновременно позволяют и совершенствовать эту технику).

В связи со сказанным главная учебная цель при изучении этого пункта состоит в знакомстве с формулой суммы, приобретении некоторого опыта её использования, в частности умения составить по этой формуле соответствующее числовое выражение, решении нескольких задач практического содержания. Что касается собственно вычислений, то иногда можно ограничиться составлением числового выражения и некоторым его упрощением. Кроме того, всюду, где возможно, следует применять калькулятор.

Укажем круг задач, которые мы рекомендуем разобрать в классах с невысоким уровнем подготовки: **664**, ***а***, **665**, ***а***, **666**, ***а***, **668—670**, **672**, **676**.

Комментарий к упражнениям

666. Можно ограничиться заданием «а».

667. Достаточно записать выражение для S_{32}: $S_{32} = 2^{32} - 1$. При желании можно провести вычисления:

$$2^{32} - 1 = (2^{10})^3 \cdot 4 - 1 = (1024)^3 \cdot 4 - 1 = 4\ 294\ 967\ 295.$$

А можно найти значение степени 2^{32} с помощью калькулятора.

669. Имеем геометрическую прогрессию, в которой $b_1 = 120\ 000$, $q = 1{,}2$, $n = 10$. Для вычисления S_{10} следует использовать калькулятор:

$$S_{10} = \frac{120\ 000 \cdot ((1{,}2)^{10} - 1)}{0{,}2} = 6 \cdot 10^5(1{,}2^{10} - 1) \approx 31{,}15 \cdot 10^5 =$$

$$= 3\ 115\ 000 \text{ (р.)}.$$

670. Имеем геометрическую прогрессию, в которой $b_1 = 32$, $q = 1{,}5$.

$$S_5 = \frac{32 \cdot (1{,}5^5 - 1)}{0{,}5} = 64 \cdot \left(\frac{3^5}{2^5} - 1\right) = 2 \cdot 3^5 - 2^6 = 422.$$

671. 1) Числа, показывающие, сколько кубиков в столбцах, образуют арифметическую прогрессию: 1; 2; 3; 4; ...; более того, это последовательные натуральные числа. Имеем

$$S_8 = 36;\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Числа, показывающие, сколько кубиков в столбцах, образуют геометрическую прогрессию: 1; 2; 4; 8; ... . Имеем

$$S_8 = \frac{1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 255;\ S_n = 2^n - 1.$$

672. О т в е т: Андрей выписал 211 слов, а Борис — 160 слов.

673. В каждом случае сначала следует убедиться, что слагаемые данной суммы образуют геометрическую прогрессию, найти её знаменатель и число суммируемых членов. (При вычислениях рекомендуем использовать калькулятор.)

а) $b_1 = 4$, $q = 3$, $n = 10$, $S_{10} = 118\ 096$;

б) $b_1 = -3$, $q = 2$, $n = 8$, $S_8 = -759$;

в) $b_1 = 1$, $q = -2$, $n = 10$, $S_{10} = 341$;

г) $b_1 = 3^0 = 1$, $q = -3$, $n = 11$, $S_{11} = 44\ 287$.

674. Так как 30 : 6 = 5, то за полчаса состоится 5 передач. С каждой передачей число телефонисток, знающих информацию, становится втрое больше. Поэтому число телефонисток, которые будут знать информацию через полчаса, равно $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 364$.

676. Задачу можно сформулировать так: число 16 250 надо разбить на 4 слагаемых так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 1,5.

По формуле суммы имеем $16\,250 = \dfrac{b_1(1{,}5^4 - 1)}{1{,}5 - 1}$. Отсюда найдём, что $b_1 = 2000$. (Можно использовать калькулятор.)

О т в е т: 2000 р., 3000 р., 4500 р., 6750 р.

677. Можно ограничиться записью искомой суммы в виде числового выражения.

а) По формуле n-го члена геометрической прогрессии найдём b_1: $\dfrac{3}{64} = b_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$; $b_1 = \dfrac{3}{8}$. Следовательно,

$$S_8 = \frac{\frac{3}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{256}\right).$$

678. а) *Способ* 1. Сначала найдём b_1. Для этого в равенство $S_3 = b_1 + b_1q + + b_1q^2$ подставим значения $S_3 = -21$ и $q = -5$. Получим $b_1 = \dfrac{-21}{1 - 5 + 25} = -1$. Теперь найдём S_6:

$$S_6 = \frac{-1 \cdot ((-5)^6 - 1)}{-5 - 1} = 2604.$$

Способ 2. $S_3 = b_1 + b_1q + b_1q^2$,

$S_6 = (b_1 + b_1q + b_1q^2) + (b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5) =$

$= (b_1 + b_1q + b_1q^2) + q^3(1 + b_1q + b_1q^2) = -21 - 5^3 \cdot (-21) = -21 \cdot (1 - 125) =$

$= -21 \cdot (-124) = 2604.$

б) Выразим S_4 через S_2:

$S_4 = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = (b_1 + b_1q) + q^2(b_1 + b_1q) = S_2 + q^2 \cdot S_2.$

Отсюда $S_2 = \dfrac{S_4}{1 + q^2} = \dfrac{62\frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{25}} = \dfrac{312 \cdot 5}{26} = 60.$

679. Так как суммы небольшие, то задачу можно решить, выписав ещё несколько членов прогрессии и складывая члены до тех пор, пока не получатся нужные суммы.

Другой способ состоит в применении формулы суммы.

а) $S_n = \dfrac{(-2)^n - 1}{-3}$; $\dfrac{(-2)^n - 1}{-3} = -85$; $(-2)^n - 1 = 255$; $(-2)^n = 256$; $(-2)^n = (-2)^8$; $n = 8$.

О т в е т: а) 8; б) 9.

680. Подставим в равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 = S_3$ значения $b_1 = 8$ и $S_3 = 56$. Получим квадратное уравнение относительно q: $8 + 8q + 8q^2 = 56$, т. е. $q^2 + q - 6 = 0$. Оно имеет корни $q_1 = -3$ и $q_2 = 2$. Задача имеет два решения: 8; –24; 72 и 8; 16; 32.

682. а) Слагаемые в данной сумме составляют геометрическую прогрессию со знаменателем x. Так как $x \neq 1$, то можно «свернуть» эту сумму, воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{50} = \frac{x \cdot (x^{50} - 1)}{x - 1}.$$

б) Слагаемые образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна x. Поэтому

$$x + 2x + 3x + \ldots + 100x = \frac{(x + 100x) \cdot 100}{2} = 5050x.$$

в) Слагаемые образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен x^2. Поэтому

$$x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{100} = \frac{x^2((x^2)^{50} - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^{100} - 1)}{x^2 - 1}.$$

г) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^{50} = x^{1 + 2 + 3 + \ldots + 50} = x^{\frac{50 \cdot 51}{2}} = x^{1275}$.

683. а) $100 + 100x + 100x^2 + 100x^3 + 100x^4 = 100(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) =$ $= 100 \cdot \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} = 100 \cdot \dfrac{1{,}1^5 - 1}{0{,}1} = 610, 51.$

б) О т в е т: 7,6867.

(Для вычислений используйте калькулятор.)

4.6. Простые и сложные проценты

Методический комментарий

Изучение этого пункта преследует несколько целей: познакомить учащихся с понятием сложного процента; усовершенствовать умения выполнять процентные расчёты, показать широту применения в жизни процентных вычислений; подчеркнуть связь изученных математических понятий (арифметическая и геометрическая прогрессии) с практикой.

В пункте разбираются две задачи реального содержания, в ходе решения которых применяются две различные схемы начисления процентов. В одном случае рассматриваемые суммы растут в арифметической прогрессии (начисляются простые проценты), в другом — в геометрической прогрессии (начисляются сложные проценты).

В системе упражнений ситуации с простыми процентами представлены в задачах **686—688** (раздел **А**) и **698** (раздел **Б**), сложными процентами — в задачах **689—696** (раздел **А**) и **699—700** (раздел **Б**). В задачах **697** (раздел **А**) и **701—702** (раздел **Б**) учащимся надо различить эти два случая и правильно выбрать схему вычисления процентов.

Полезно сообщить учащимся, что сюжеты задач заимствованы из реальной жизни. Нужно также подчеркнуть, что для получения ответа можно и нужно использовать калькулятор — всюду, где это целесообразно.

Комментарий к упражнениям

684. Полезно вспомнить, как проценты выражаются десятичными дробями: 1% — $\frac{1}{100}$, или 0,01; 25% — это $\frac{25}{100}$, или 0,25; 4% — это $\frac{4}{100}$, или 0,04; 0,3% — это $\frac{0,3}{100}=\frac{3}{1000}$, или 0,003; 106% — это $\frac{106}{100}$, или 1,06.

685. Проводимые здесь рассуждения являются базовыми для решения последующих задач.

а) Так как 20% — это 0,2, то повышение цены a (в рублях) на 20% означает её увеличение на $0{,}2a$, т. е. новая цена альбома равна $a + 0{,}2a = 1{,}2a$.

Можно рассуждать по-другому: цена повысится на 20% и составит 120% прежней цены, т.е. увеличится в 1,2 раза и будет равна 1,2 р.

б) Снижение цены a (в рублях) на 65% означает её уменьшение на $0{,}65a$, т. е. новая цена альбома равна $a - 0{,}65a = 0{,}35a$.

Можно рассуждать иначе: новая цена составит 35% прежней цены и станет равна $0{,}35a$ р.

686. а) Речь в задаче идёт о простых процентах. Выплаты за один месяц составляют 0,4% от 200 тыс. р., т. е. 200 000 · 0,004 = 800 (р.), а за n месяцев $800n$ р.

б) На языке математики вопрос задачи звучит так: найти наименьшее натуральное значение n, при котором выполняется неравенство $800n > 10\,000$. Получаем: $n > 12{,}5$; $n = 13$. О т в е т: через 13 месяцев.

687. а) Так как 8% от 360 000 р. составляет 28 800 р., то продажная стоимость автомобиля с каждым годом уменьшается на 28 800 р.

Через 5 лет эксплуатации продажная стоимость автомобиля составит 360 000 – 28 800 · 5 = 216 000 (р.), а через n лет она составит $360\,000 - 28\,800 \cdot n$ (р.)

б) Решив неравенство $360\,000 - 28\,800 \cdot n < 150\,000$, найдём, что $n > 7$, т. е. через 8 лет стоимость автомобиля составит 129 600 р.

Дополнительный вопрос. О каких процентах — простых или сложных идет речь в задаче?

688. Плата за завтраки увеличивается в арифметической прогрессии; $a_1 = 240$, $d = 4{,}8$.

а) Плата за декабрь — четвёртый член этой прогрессии; $a_4 = 240 + 4{,}8 \cdot 3 = 254{,}4$.

б) Найдём сумму первых четырёх членов арифметической прогрессии: $S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} = \frac{(240 + 254{,}4) \cdot 4}{2} = 988{,}8$.

О т в е т: а) 254 р. 40 к.; б) 988 р. 80 к.

689. Упражнение выполняется по образцу примера 2 из текста. В вычислениях используем калькулятор.

Дополнительный вопрос. Почему можно утверждать, что количество денег на счёте будет расти в геометрической прогрессии?

О т в е т: через 1 год — 1575 р., через 2 года — 1653,75 р., через 3 года — 1736,43 р., через 4 года — 1823,26 р., через n лет — $1500 \cdot 1{,}05^n$ р.

690. О т в е т: а) Через 1 год — 2240 р., через 2 года — 2509 р., через 5 лет — 3525 р.

б) Через 6 лет — 3948 р., через 7 лет — 4421 р., т. е. через 7 лет сумма превзойдёт удвоенный начальный вклад.

в) Через n лет — $2000 \cdot 1{,}12^n$ р.

691. Вклад растёт в геометрической прогрессии. При 8% годовых сумма вклада, равная 500 р., ежегодно увеличивается в 1,08 раза. С помощью калькулятора будем последовательно выполнять умножение на 1,08 и наблюдать за показаниями на экране. При 8% годовых вклад удвоится через 10 лет; при 10% годовых — через 7 лет; при 16% годовых — через 5 лет.

692. а) Вычислим доход по вкладу в первый год. Для этого найдём 18% от 5000 р.: $5000 \cdot 0{,}18 = 900$ (р.).

б) В учебнике приводятся два способа вычисления дохода по вкладу при начислении сложных процентов.

Способ 1. Будем рассуждать так: на счёте через 4 года будет $5000 \cdot 1{,}18^4 = 9693{,}9$ (р.); тогда за 5-й год доход составит $9693{,}9 \cdot 0{,}18 = 1744{,}9$ (р.).

Способ 2. Через 4 года на счете будет $5000 \cdot 1{,}18^4 = 9693{,}9$ (р.); через 5 лет на счёте будет $5000 \cdot 1{,}18^5 = 11\,438{,}8$ (р.); за 5-й год доход составит $11\,438{,}8 - 9693{,}9 = 1744{,}9$ (р.).

693. Начисляются сложные проценты. Решение можно оформить так:

Сумма вклада	Годовой доход
через 1 год — $2000 \cdot 1{,}1 = 2200$ р.	за 1-й год: $2200 - 2000 = 200$ (р.)
через 2 года — $2200 \cdot 1{,}1 = 2420$ р.	за 2-й год: $2420 - 2200 = 220$ (р.) (больше, чем за 1-й, на 20 р.)
через 3 года — $2420 \cdot 1{,}1 = 2662$ р.	за 3-й год: $2662 - 2420 = 242$ (р.) (больше, чем за 2-й, на 22 р.)
через 4 года — $2662 \cdot 1{,}1 = 2928{,}2$ р.	за 4-й год: $2928{,}2 - 2662 = 266{,}2$ (р.) (больше, чем за 3-й, на 24,2 р.)

695. а) Примерное число ДТП в 2022 г. можно найти последовательным вычислением сложных процентов. А можно воспользоваться формулами: число ДТП убывает в геометрической прогрессии ($b_1 = 640$, $q = 0{,}75$); число ДТП в 2022 г. соответствует 7-му члену этой прогрессии. Имеем $b_7 = 640 \cdot 0{,}75^6 \approx 114$.

б) Общее число ДТП с 2016 по 2022 г. включительно соответствует сумме семи членов этой прогрессии:

$$S = \frac{640 \cdot (1 - 0{,}75^7)}{1 - 0{,}75} \approx 2218.$$

696. Число слов, которые Андрей будет помнить, ежедневно уменьшается на 5%, а потому составляет 95% от числа слов, которые он помнил накануне. Через неделю, т. е. через 7 дней, он будет помнить $80 \cdot 0{,}95^7 \approx 55$ слов.

697. Анализ данных расчёта показывает, что ежегодно сумма долга увеличивается на 2500 р., т. е. насчитываются простые проценты (10% от суммы кредита).

698. а) Сумма (в рублях), выплаченная покупателем квартиры, растёт в арифметической прогрессии, первый член которой равен 600 000 · 0,1 = 60 000, а разность равна 600 000 · 0,03 = 18 000.

Через месяц покупатель выплатил сумму, равную 60 000 + 18 000 (р.), через 2 месяца — сумму, равную 60 000 + 18 000 · 2 (р.), через n месяцев — сумму, равную $a_n = 60\,000 + 18\,000n$ (р.). Поэтому через год было выплачено 60 000 + 18 000 · 12 = = 276 000 (р.), через 2 года — 60 000 + 18 000 · 24 = 492 000 (р.).

б) $S_n = 600\,000 - (60\,000 + 18\,000n) = 540\,000 - 18\,000n$.

$S_{12} = 324\,000$ р., $S_{24} = 108\,000$ р.

в) Решив уравнение $60\,000 + 18\,000n = 600\,000$, найдём, что $n = 30$, т. е. выплата стоимости квартиры рассчитана на 30 месяцев (на 2,5 года).

г) Для графической иллюстрации можно составить такую таблицу.

Сумма (р.)	**Сразу**	**Через 1 год**	**Через 2 года**	**Через 2,5 года**
Выплачено	60 000	276 000	492 000	600 000
Остаток	540 000	324 000	108 000	0

699. а) Так как 10% от 5000 р. составляет 500 р., а 20% от 5000 р. — 1000 р., то полученный через год доход по второму вкладу будет больше дохода по первому вкладу в 2 раза. Ответ на вопрос можно получить иначе: 20% величины больше 10% той же величины в 2 раза.

б) Вычислим ежегодные денежные суммы на каждом из двух счетов и представим в виде таблицы:

Начисляемые проценты	**Сумма вклада (р.)**			
	Через 1 год	**Через 2 года**	**Через 3 года**	**Через 4 года**
10 %	1100	1210	1331	1464
20 %	1200	1440	1728	2073

Доход за 4-й год по второму вкладу составил 2073 – 1728 = 345 (р.), а по первому вкладу — 1464 – 1331 – 133 (р); доход по второму вкладу примерно в 2,6 раза больше.

Отношение ежегодных доходов увеличивается. Это происходит потому, что увеличение второго вклада идёт быстрее (каждый вклад изменяется в геометрической прогрессии, оба знаменателя больше 1, но знаменатель второй прогрессии больше).

700. а) Верно, так как через год доход Николая составит 300 р., Сергея — 150 р. Обоснуем ответ иначе: так как рассматриваются проценты от одной и той же величины, то можно найти их отношение; 10 : 5 — это и будет отношение доходов за первый год.

б) Нет, так как доход Николая растёт быстрее.

701. а) В первом случае начисляются простые проценты и годовой доход составит $(1200 \cdot 0{,}03) \cdot 4 = 144$ (р.). Во втором случае начисляются сложные проценты и годовой доход составит $1200 \cdot 1{,}03^4 - 1200 \approx 150$ (р.).

б) 12% и 12,5%.

702. а) Расчёты представим в виде таблицы:

Годы	**Годовой заработок (р.)**	
	Работа 1	Работа 2
Первый год	150 000	100 000
Второй год	172 500	120 000
Третий год	195 000	144 000

б) Для ответа на вопрос продолжим заполнение таблицы (следует использовать калькулятор; результаты округлить до целых).

О т в е т: на пятый год.

в) На первой работе заработок увеличивается в арифметической прогрессии: $a_1 = 150$ тыс. р., $d = 22{,}5$ тыс. р., $S_{10} = 2512{,}5$ тыс. р. На второй работе заработок увеличивается в геометрической прогрессии: $b_1 = 100$ тыс. р., $q = 1{,}2$, $S_{10} \approx 2595{,}9$ тыс. р. Следовательно, суммарный заработок будет больше на второй работе.

703. Идёт последовательное накопление денег на счёте (см. таблицу).

Месяц	**Сумма вклада**
Январь	1000 (р.)
Февраль	$1000 \cdot 1{,}02 + 1000$ (р.)
Март	$1000 \cdot 1{,}02^2 + 1000 \cdot 1{,}02 + 1000$ (р.)
…	…
Декабрь	$1000 \cdot 1{,}02^{11} + 1000 \cdot 1{,}02^{10} + \ldots + 1000 =$ $= 1000 \cdot (1{,}02^{11} + 1{,}02^{10} + \ldots + 1) =$ $= 1000 \cdot \dfrac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \approx 13\,412$ (р.)

4.7. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

Цель работы — расширить кругозор школьников, проявляющих интерес к математике, и на примере бесконечно убывающей геометрической прогрессии познакомить их на эмпирическом уровне с новой для них математической идеей — идеей предела. Определения предела в пункте не даётся и термин этот не вводится, но суть понятия показана.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии вводится без доказательства. Но при возможности можно дополнить материал рассуждением, которое позволяет «увидеть», как возникает эта формула. Рассуждение может быть примерно таким.

Рассмотрим сумму первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем $|q| < 1$: $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$. Перепишем эту формулу так: $S_n = \frac{b}{1-q} \cdot (1-q^n)$. Дальнейшее рассуждение будет основано на том, что если $n \to \infty$, то q^n при $0 < q < 1$ и при $-1 < q < 0$ стремится к нулю. Можно провести числовой эксперимент, чтобы убедиться в этом. Так как при неограниченном увеличении n значение q^n стремится к нулю, то значение двучлена $1 - q^n$ стремится к 1, а сумма S_n стремится к числу $\frac{b}{1-q}$.

Важно предупреждать учащихся, чтобы они были внимательны при употреблении терминов «сумма первых n членов геометрической прогрессии» и «сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии». Важно, чтобы они понимали, что это разные понятия.

В заключение показано применение формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для представления бесконечных десятичных периодических дробей в виде обыкновенных дробей.

Комментарий к упражнениям

704. а) и в). Целесообразно в каждом случае предложить учащимся выписать несколько первых членов последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots$. О т в е т: а) 1; в) 31,25.

705. О т в е т: $1111\frac{1}{9}$.

706. б) 0,(12) = 0,12 + 0,0012 + 0, 000012 + … ; b = 0,12, q = 0,01. Получаем: $0,(12) = \frac{0,12}{1-0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Полезно перед тем, как раскладывать запись 0,(12) в бесконечную сумму, предложить учащимся развернуть эту запись, выписав несколько десятичных знаков этого числа.

в) 0,1(3) = 0,1 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + … . Сначала, используя формулу $S=\dfrac{b}{1-q}$, найдём сумму 0,03 + 0,003 + 0,0003 + … , а затем сложим её с $\dfrac{1}{10}$.

О т в е т: $\dfrac{2}{15}$.

707. а) Площадь каждого следующего квадрата равна половине площади предыдущего. Так как площадь первого квадрата равна 1, то площади всех последующих квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$. Её сумма равна 1 (см. упражнение **704**, а).

б) Периметр исходного треугольника равен 3. Длина стороны каждого следующего треугольника в два раза меньше длины стороны предыдущего, значит, и его периметр в два раза меньше периметра предыдущего треугольника. Периметры вписанных треугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{16}, \ldots$. Её сумма равна 3.

4.8. Треугольник Паскаля (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

Начать занятие можно с небольшого введения, освещающего историю вопроса (соответствующий фрагмент есть в учебнике), и с построения треугольника Паскаля. Строить его надо в ходе совместной работы одновременно на доске и в тетрадях. Следует предупредить учащихся, что работу необходимо выполнять очень аккуратно, при этом нужно оставить достаточное место для продолжения таблицы (при продолжении она будет расти вширь и вниз). Справа нужно поместить столбец, содержащий номера строк таблицы; следует сделать акцент на том, что строки принято нумеровать, начиная с нуля.

В качестве упражнения можно предложить учащимся построить самостоятельно ещё несколько строк таблицы. (Если начало оказалось неаккуратным, лучше выполнить построение заново.)

После того как таблица построена, можно познакомиться с некоторыми её интересными свойствами, выполнив упражнения **708—710**.

Далее следует ввести стандартные обозначения для чисел, входящих в таблицу: число, расположенное в n-й строке на месте с номером m, обозначают как C_n^m. (Обратите внимание: нумерация элементов в строке также начинается с нуля.) Для того чтобы учащиеся освоились с этим обозначением, нужно предложить им упражнения **712—714.**

Наконец, можно перейти к вопросу о связи треугольника Паскаля с формулой, по которой выражение вида $(a + b)^n$ представляется в виде многочлена, т. е. с формулой бинома Ньютона. В связи с этим полезно сообщить учащимся, что таблицу, с которой мы познакомились, открывали и изучали многие математики, жившие в разные времена. А интерес математиков к ней объяснялся желанием изобрести общую формулу для возведения в степень суммы двух чисел.

К этому заключительному фрагменту теории примыкают упражнения **715—718**.

Комментарий к упражнениям

709. Легко увидеть с помощью схемы, приведённой в учебнике, что при построении новой строки каждый элемент предыдущей «участвует» дважды.

714. $C_5^2 = C_5^3$, $C_6^1 = C_6^5$ и вообще $C_n^m = C_n^{n-m}$.

715. Сначала надо рассмотреть в учебнике текст, в котором описаны структурные особенности многочленов, получающихся при возведении в степень двучлена.

716. в) Заменить в многочлене, полученном при преобразовании в сумму выражения $(a + b)^6$, переменную b на $-b$.

г) Записать в виде многочлена $(a + b)^7$; подставить $a = 2$, $b = -m$.

Дополнительные задания

Комментарий к упражнениям

719. Для ответа на вопросы 2 и 3 полезно изобразить члены каждой последовательности на координатной прямой.

2) а) Последовательность убывающая; б) последовательность возрастающая.

3) а) Все члены последовательности принадлежат промежутку (1; 2]; б) все члены последовательности принадлежат промежутку [1; 2).

720. а) Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, первый член которой равен 12, а каждый следующий получается прибавлением к предыдущему числа -5, т. е. $d = -5$. Имеем $a_n = 12 - 5(n - 1)$, $a_n = 17 - 5n$.

в) Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, первый член которой равен 24, а каждый следующий получается умножением предыдущего на $\frac{1}{2}$, т. е. $q = \frac{1}{2}$. Имеем $b_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n = \frac{24}{2^{n-1}}$.

722. а) Выпишем несколько последовательных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2: 2; 5; 8; 11; 14; ... . Формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2, имеет вид $a = 3n + 2$, где $n = 0; 1; 2; \ldots$. Перепишем её иначе для $n \in \boldsymbol{N}$, т. е. для $n = 1, 2, 3, \ldots$: $a_n = 3(n - 1) + 2 = 3n - 1$.

(Полезно убедиться, что при подстановке в эту формулу вместо n чисел 1, 2, 3 и т. д. будут получаться выписанные выше числа.) Так как последовательность задана формулой вида $a_n = kn + b$, где $k = 3$, $b = -1$, то последовательность является арифметической прогрессией; её разность равна 3.

б) Рассуждая так же, как в задании *а*, запишем формулу чисел, которые при делении на k дают в остатке r: $a_n = kn - (k - r)$,
где $n = 1; 2; 3; \ldots, r < k$. Это формула вида $a_n = kn + b$ (в ней $-(k - r) = b$), поэтому последовательность является арифметической прогрессией с разностью k.

723. б) Эта задача является переформулированным вариантом задачи «а». Она сводится к нахождению первого члена и разности арифметической прогрессии, членами которой являются какие-либо два из данных чисел, например a_7 и a_{12}, и последующей проверке, является ли членом этой прогрессии (и если да, то с каким номером) третье из данных чисел.

724. 1) Выразим каждую из сумм S_1, S_2 и S_3 через a_1 и d:

$$S_1 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d,$$

$$S_2 = a_1 + 3d + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 3a_1 + 12d,$$

$$S_3 = a_1 + 6d + (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d) = 3a_1 + 21d.$$

Вычислив разность между S_2 и S_1 и разность между S_3 и S_2, получим $S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = 9d$. Так как разность между соседними членами последовательности постоянна, то последовательность является арифметической прогрессией.

2) Рассмотрим последовательность S_1, S_2, S_3, где S_1 — сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии, S_2 — сумма следующих четырёх членов этой арифметической прогрессии и S_3 — сумма третьей четвёрки членов этой прогрессии, т. е. с девятого по двенадцатый включительно. Эта последовательность является арифметической прогрессией (см. п. 1 этой задачи), в которой известны первые два члена, и нужно найти третий:

$$d = S_2 - S_1 = 46 - 14 = 32,\ S_3 = S_2 + d = 46 + 32 = 78.$$

Эту задачу можно решить и по-другому.

Из условия известно, что $S_4 = 14$ и $S_8 = 14 + 46 = 60$. Воспользовавшись формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_1 + d \cdot 3) \cdot 4}{2} = 14 \\ \dfrac{(2a_1 + d \cdot 7) \cdot 8}{2} = 60. \end{cases}$$

Решив систему, найдём, что $a_1 = 0{,}5$ и $d = 2$.

Далее, $S_{12} = \dfrac{(2 \cdot 0{,}5\ + 2 \cdot 11) \cdot 12}{2} = 138$, а сумма членов с 9-го по 12-й включительно равна $138 - 60 = 78$.

725. Обозначим арифметическую прогрессию (a_n). Из условия имеем, что $S_5 = S_5 + a_6 + a_7$, откуда $a_6 + a_7 = 0$. Это равенство возможно в двух случаях: 1) $a_6 = a_7 = 0$; 2) $a_6 = -a_7$. Рассмотрим каждый из них.

1) Из равенства следует, что все члены данной арифметической прогрессии равны нулю, значит, и сумма первых двенадцати членов равна 0.

2) Разность d арифметической прогрессии равна $-2a_6$. Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии, найдём, что $a_1 = 11a_6$, и по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии получим, что $S_{12} = 0$.

726. а) $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = (50 - 49)(50 + 49) + (48 - 47)(48 + 47) + ... + (2 - 1)(2 + 1) = 99 + 95 + ... + 3$.

Слагаемые получившейся суммы составляют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 99$, $d = -4$, $a_n = 3$, $n = 25$.

О т в е т: 1275.

727. а) Сначала нужно предложить учащимся выписать первые несколько членов последовательности, состоящей из членов геометрической прогрессии (b_n) с чётными номерами: b_1q, b_1q^3, b_1q^5, b_1q^7, … . Они могут легко увидеть, что отношение каждого следующего члена выписанной последовательности к предыдущему равно q^2. Теперь остаётся доказать, что это выполняется для любых двух соседних членов последовательности. Произвольный член этой последовательности с номером n имеет вид b_1q^{2n-1}, следующий за ним член имеет вид b_1q^{2n+1}. Следовательно, $\dfrac{b_1q^{2+1}}{b_1q^{2-1}} = q^2$.

729. Пусть $S_1 = b_1 + b_2 + b_3$, $S_2 = b_2 + b_3 + b_4$ и $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$.

Из условия известно, что $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 42$ и $b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = 21$.

Составим систему уравнений $\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 42 \\ b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = 21. \end{cases}$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим $\dfrac{b_1q(1 + q + q^2)}{b_1(1 + q + q^2)} = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$.

Вычтем из первого уравнения системы второе и подставим в полученное уравнение значение q, равное $\dfrac{1}{2}$. Получим $b_1(1 - q^3) = 21$, $b_1\left(1 - \dfrac{1}{8}\right) = 21$; $b_1 = 24$.

Теперь можно вычислить сумму всех четырёх членов геометрической прогрессии: $S = S_2 + 24 = 21 + 24 = 45$.

Можно также вычислить S по формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии.

731. а) Ежегодный доход составляет 40% от стоимости 100 акций, равной 5000 р.: 0,4 от 5000 р. — это 2000 р. Следовательно, доход акционера за 1 год составит 2000 р., за 3 года — 6000 р., за 10 лет — 20 000 р., за n лет — $2000n$ р.

б) Переформулируем задачу. Суммарный доход акционера растёт в арифметической прогрессии: $a_1 = 2000$, $d = 2000$. При каком n $a_n > 10\,000$?

Р е ш е н и е. Если $a_n = 2000 + 2000(n - 1) > 10\,000$, то $n > 5$.

О т в е т: через 6 лет.

732. Цены растут в геометрической прогрессии: $b_1 = 300$, $q = 1{,}03$; найдём $b_8 = 300 \cdot 1{,}03^7 = 368{,}96$.

О т в е т: примерно 370 марок.

733. а) Нужно предложить учащимся перенести таблицу в тетрадь и заполнить её. При вычислениях надо использовать калькулятор. Число жителей каждого района ежегодно изменялось в геометрической прогрессии: в центральном районе со знаменателем, равным 0,92, а в новом — со знаменателем, равным 1,3.

Год / Район	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Центральный	30 тыс.	27,6 тыс.	25,4 тыс.	23,4 тыс.	21,5 тыс.	19,8 тыс.
Новый	10 тыс.	13 тыс.	16,9 тыс.	22 тыс.	28,6 тыс.	37,1 тыс.

Анализируя таблицу, видим, что число жителей нового района превзошло число жителей центрального района в 2009 г.

Дополнительный вопрос. В каком году число жителей нового района было меньше числа жителей центрального района в 3 раза? примерно в 2 раза? Стало больше примерно в 2 раза?

б) Исходя из данных 2010 г., имеем $\frac{19,8}{37,1} \approx 0,533$, т. е. примерно 53%.

734. а) Число книг возрастало в геометрической прогрессии: $b_1 = 10\,000$, $q = 1,03$. Найдём $b_{13} = 10\,000 \cdot 1,03^{12} \approx 14\,257$. Таким образом, в библиотечном фонде к началу года было 10 000 книг, к концу — примерно 14 000 книг, т. е. примерно на 4000 книг больше. Так как $\frac{4250}{10\,000}$, то фонд увеличился примерно на 40%.

б) Если величину начального вклада обозначить через x (р.), то за год в результате начисления сложных процентов вклад увеличится и составит $x \cdot 1,02^{12}$ (р.).

Выясним, сколько процентов составит новая сумма от первоначальной. Для этого найдём отношение новой суммы вклада к первоначальной $(1,02^{12} \approx 1,27)$ и выразим его в процентах: $\frac{x \cdot 1,27}{x} = 1,27,$ т. е. примерно 127%. Таким образом, на этот вклад за год будет начислено примерно 27%.

735. а) Задачу можно решить, составив уравнение.

Обозначим первоначальную стоимость холодильника (в рублях) буквой a. Пусть x — это процент однократного снижения цены, выраженный дробью. Так как после двух снижений цена холодильника составила $0,64a$ р., то можно составить уравнение $a(1 - x)^2 = 0,64a$. Разделим обе части уравнения на a, получим $(1 - x)^2 = 0,64$. Решив это уравнение, найдём, что $x_1 = 0,2$, $x_2 = 1,8$. Второй корень не подходит по смыслу задачи (можно попросить учащихся объяснить почему). Выразив 0,2 в процентах, получим 20%. Значит, цена холодильника дважды снижалась на 20%.

Полезно после решения задачи предложить учащимся проконтролировать свой ответ, взяв, например, первоначальную цену холодильника 100 р. и вычислив новую цену, уменьшив её дважды по схеме сложных процентов на 20%.

б) Пусть первоначальная цена компьютера a р., а x — это процент повышения и снижения цены, выраженный дробью. Составим уравнение, учитывая, что новая цена после двух изменений стала равна $0,99a$ р.:

$$a(1 + x)(1 - x) = 0,99a, \quad (1 + x)(1 - x) = 0,99, \quad x_1 = 0,1, \; x_2 = -0,1.$$

Второй корень не подходит по смыслу задачи. Выразив 0,1 в процентах, получим, что цена компьютера повышалась и снижалась на 10%.

Глава 5. Статистика и вероятность (9 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Дидактические материалы	Рабочая тетрадь
5.1. Выборочные исследования	2	О-28, П-48	172, 173 (1, 2)
5.2. Интервальный ряд. Гистограмма	2	О-29, П-49	173 (3, 4), 174
5.3. Характеристики разброса	2	О-30, П-50	173 (5), 175, 176
5.4. Статистическое оценивание и прогноз	1	О-31, П-51	—
Обзор и контроль	2	«*Проверь себя*»	

Основные цели: сформировать представление о статистических исследованиях, обработке данных и интерпретации результатов.

Обзор главы. В данной главе представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии курса. Особенностью принятого в учебниках подхода является то, что статистические понятия в определённом смысле служат стержнем, который пронизывает весь материал данной линии. Такая роль статистики в курсе обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного человека. Они нужны как для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, так и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, включая социологию, экономику, право, медицину, биологию, демографию и т. д. Через решение статистических задач в значительной степени реализуется идея прикладной направленности курса, являющейся одним из основных положений современной концепции математического образования.

В главе повторяются полученные ранее знания о случайных экспериментах, способах представления данных, статистических характеристиках, а также вводятся некоторые новые понятия (выборка, генеральная совокупность, полигон частот, гистограмма, мера разброса и др.). Все эти понятия, как известные, так и новые, рассматриваются на доступных учащимся примерах комплексных статистических исследований.

Заметим, что включение данного материала направлено прежде всего на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые, например, в средствах массовой информации. Иными словами, предполагается не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первоначальное знакомство с понятийным аппаратом этой области знаний, представление о которой необходимо каждому современному человеку.

Принципиально важным представляется и то обстоятельство, что при решении задач учащимся придётся выполнять довольно много математических расчётов, используя при этом калькулятор. Особенно актуальным становится умение находить отношение величин и выражать их в процентах, проводить процентные расчёты. Придётся также планировать собственную деятельность, понимать содержание описанного алгоритма и самостоятельно действовать в соответствии с его этапами. Таким образом, эта глава даст серьёзный импульс для совершенствования вычислительных умений школьников, развития алгоритмического мышления.

В новых программах основного общего образования по математике достаточно много место занимают материалы повышенного уровня сложности, необязательные для изучения. Посчитав, что сама вероятностно-статистическая линия всё ещё остаётся достаточно новой и непривычной для российской школы, авторы учебника решили вынести материал этой линии, помеченный в программах как необязательный, из основного текста учебника и разместить его в приложении к данному методическому пособию.

Приложение включает в себя 5 разделов:

1. Независимость событий.
2. Комбинаторика и вероятность.
3. Случайные величины.
4. Испытания Бернулли.
5. Закон больших чисел.

В каждом разделе приводится необходимый теоретический материал, рассматриваются примеры, даются методические рекомендации. Каждый раздел заканчивается небольшим списком упражнений, снабжённых решениями.

Основные виды деятельности. Осуществлять поиск статистической информации, рассматривать реальную статистическую информацию, организовывать и анализировать её (ранжировать данные, строить интервальные ряды, диаграммы, полигоны частот, гистограммы; вычислять различные средние, а также характеристики разброса). Прогнозировать частоту повторения события на основе имеющихся статистических данных.

Комментарий к использованию ЭИ. С помощью ЭИ (раздел «Вероятность и статистика») учащиеся имеют возможность познакомиться с реальными примерами случайных выборок, полученных в результате статистических экспериментов, наблюдений, опросов; закрепить определения частот и алгоритмов их вычисления; отработать навыки по свободному переходу от одной формы представления выборки к другой (числовой ряд, ранжированный ряд, таблица частот, полигон, гистограмма); познакомить с понятием группировки данных и объяснить его смысл. Все эти вопросы рассматриваются в неразрывной связи с их практической реализацией на компьютере при работе с электронной таблицей.

В этом разделе продолжается освоение школьником возможностей ЭТ по автоматической обработке статистических данных. Появляется необходимость в упорядочивании информации, составлении частотных таблиц, графическом представлении данных.

Особое внимание при вычислении частот следует обратить на правильный ввод формул и выбор адресации ячеек.

Возможно также использование ИУМК «Вероятность и статистика в школьном курсе математики», разделы 4.1—4.3.

5.1. Выборочные исследования

Методический комментарий

Основная цель пункта — дать представление о выборочном методе исследования. Это делается на близком жизненному опыту учащихся примере изучения качества знаний школьников. В объяснительном тексте отражены основные этапы этого исследования: обсуждается проблема построения представительной выборки, демонстрируются приёмы наглядного представления данных, проводится анализ полученных результатов. По сути, в учебнике в неформализованном виде представлен алгоритм, который выполняют статистики при проведении подобных исследований. В ходе решения задач учащиеся будут воспроизводить (полностью или частично) этот алгоритм, опираясь на представленный образец.

Исследование, изложенное в объяснительном тексте, целесообразно сделать предметом совместного обсуждения в классе. При этом учащиеся должны оказаться в роли исследователей и сами выполнить описанные процедуры (ранжирование данных, сведение их в таблицу и пр.).

В данном пункте используются уже известные учащимся вероятностно-статистические понятия, а также вводятся некоторые новые. Новые понятия во всей главе возникают естественным путём, когда этого требует логика изложения. В связи с этим по ходу ознакомления с материалом полезно составлять словарь новых терминов. Для данного пункта он может выглядеть так: *генеральная совокупность, выборка, представительная (репрезентативная) выборка, объём выборки, ранжированный ряд, полигон частот.* При изучении следующих пунктов этот словарь нужно будет дополнять. Надо стремиться к тому, чтобы учащиеся понимали выписанные термины и могли использовать их в речи.

Что касается понятий, встречавшихся учащимся ранее (таких, как число повторений, частота, среднее арифметическое и др.), то их повторение может происходить по мере продвижения в проводимом исследовании. Напомним, что *числом повторений случайного события* называют число его появлений при проведении серии испытаний. Например, если при 100 бросках монеты орёл выпал 43 раза, то говорят, что абсолютная частота события «выпал орёл» равна 43. А *частотой случайного события* называют отношение числа появлений этого события к общему числу испытаний. Так, в нашем примере частота события «выпал орёл» равна 0,43, или 43%.

Цель задач, приведённых в пункте, — осознание приёмов проведения статистических исследований, освоение введённых терминов. Каждая из них является комплексной, многошаговой. Проведение исследований, составляющих содержание задач, как и реальных статистических исследований, должно осуществляться в ходе коллективной работы. В связи с этим при решении задач класс нужно делить на группы (по 4—5 человек), каждая из которых будет решать поставленную задачу. (Она может быть одна и та же для всех групп.) Дело учителя — помочь спланировать работу в группах. Результаты исследований какой-либо группы должны быть представлены в классе для общего обсуждения.

Число задач в пункте избыточно, и при их отборе учителю следует исходить из возможностей класса. (Идеальная ситуация, когда кто-либо из учащихся захочет решить задачу просто потому, что ему она интересна.)

На первом из двух отведённых на этот пункт уроков после рассмотрения исследования, описанного в тексте, можно решить ещё, например, задачу **740** (на дом задача **739**) и рассмотреть задачу **743**. На следующем уроке можно разобрать задачи **741**, **744**, **745** (организовав работу по группам, а часть из них оставив для домашней работы).

Комментарий к упражнениям

739. а) Для ранжирования ряда прежде всего выясним, какие буквы в нём встречаются. Получим семь различных букв: П, О, Л, С, Я, К, З. Затем расположим их в алфавитном порядке: З, К, Л, О, П, С, Я. Далее распределим буквы из списка по семи группам. Получим

З, З, З, З;

К, К, К, К, К, К, К, К;

Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л, Л;

О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О, О;

П, П;

С, С, С, С, С, С, С, С, С, С;

Я, Я, Я, Я, Я, Я.

б) Используем результаты ранжирования для составления таблицы абсолютных и относительных частот. (Всего было поймано 80 рыб.)

Вид рыбы	**З**	**К**	**Л**	**О**	**П**	**С**	**Я**
Число повторений	4	8	13	17	22	10	6
Частота (%)	5	10	16,25	21,25	27,5	12,5	7,5

в) Используя данные таблицы, получим, что золотые рыбки составляют 5% от общего количества пойманной рыбы.

г) Выборка показывает, что наиболее распространён в реке пескарь, наименее — золотая рыбка.

740. а) Сначала путём просмотра всей выборки выясним, какие в ней встречаются размеры, и расположим их в порядке возрастания:

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Далее подсчитаем количество пар каждого размера в выборке, т. е. абсолютную частоту появления каждого размера. Подсчёты можно вести с помощью ранжирования (как в учебнике) или следующим образом:

15 ~~||||~~ ~~||||~~ ||

16 ~~||||~~ ||| и т. д.

Полученные данные сведём в таблицу:

Размер обуви	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Число повторений	12	8	11	16	19	15	14	19	20	16
Частота	0,08	0,05	0,07	0,11	0,13	0,1	0,09	0,13	0,13	0,11

б) Мода ряда размеров — число 23.

в) Для построения диаграммы частот воспользуемся данными таблицы. Отложим имеющиеся размеры по горизонтальной оси, а количество пар каждого размера по вертикальной оси (рис. 5.1).

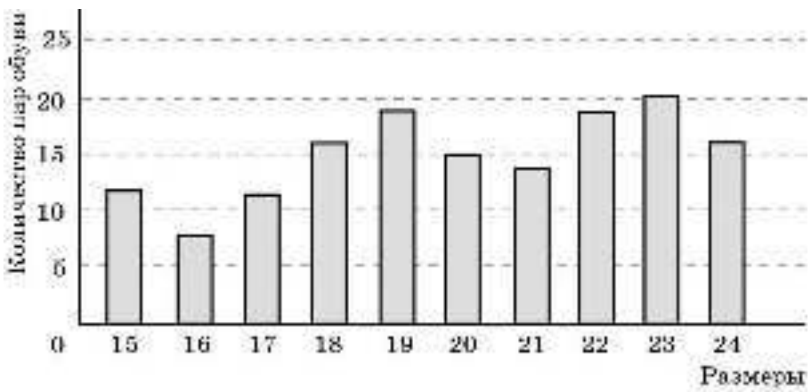

Рис. 5.1

г) Медиану ряда можно найти, не выписывая ранжированный ряд, а опираясь на данные таблицы (или диаграммы). Так как в ряду 150 чисел, то медиана равна среднему арифметическому 75-го и 76-го членов этого ряда. Поэтому нужно определить, какие размеры находятся в ряду на этих местах. Складывая последовательно абсолютные частоты размеров, начиная с 15-го, получим, что на 66-м месте в ряду расположен размер 19 (так как 12 + 8 + 11 + 16 + 19 = 66), а на следующих пятнадцати местах, а значит, и на 75-м и на 76-м — размер 20. Медиана ряда равна 20.

Дополнительное задание. Поясните в соответствии со смыслом задачи, что означает, что медиана равна 20. Учащиеся могут ответить примерно так: это означает, что половина покупателей купила обувь размера, не превосходящего 20, а половина — большего или равного 20.

741. а) Чтобы определить час пик, найдём общее количество людей всех возрастов, едущих в вагоне в каждый час. Для этого просуммируем данные таблицы по столбцам:

Время	**6 ч 30 мин**	**7 ч 30 мин**	**8 ч 30 мин**	**9 ч 30 мин**	**10 ч 30 мин**	**11 ч 30 мин**
Количество людей	60	126	200	189	148	90

Из выборки видно, что час пик наступает в 8 ч 30 мин.

б) Сначала найдём частоту указанной возрастной категории в каждый час. Для этого, воспользовавшись исходной таблицей и таблицей из пункта «а», вычислим отношение числа людей данного возраста к общему числу людей в вагоне.

Время	**6 ч 30 мин**	**7 ч 30 мин**	**8 ч 30 мин**	**9 ч 30 мин**	**10 ч 30 мин**	**11 ч 30 мин**
Частота людей в возрасте от 30 до 40 лет (в долях и в процентах)	$\frac{1}{5}$ (20%)	$\frac{2}{7}$ (29%)	$\frac{1}{4}$ (25%)	$\frac{16}{63}$ (25%)	$\frac{1}{4}$ (25%)	$\frac{1}{5}$ (20%)

Теперь ясно, что искомое время — 7 ч 30 мин.

в) В вагоне, отправляющемся в 11 ч 30 мин, находится 15 + 18 + 12 = 45 пассажиров в возрасте от 20 до 50 лет. Они составляют $\frac{45}{90} = 0{,}5$, т. е. 50% пассажиров вагона.

742. а) Чтобы получить объективные данные по школе, нужно, чтобы в опросе участвовали учащиеся всех классов, а не только девятиклассники. Следовательно, выборка не является репрезентативной.

б) Нет, так как в опросе не участвовали девочки.

743. а) Выборка не является репрезентативной. Летом нет снега и наледи на дорогах, а это одна из основных причин аварий.

б) Выборка не является репрезентативной. Понятно, что в городе машин намного больше, чем в сельских районах, и это необходимо учитывать.

в) Выборка не является репрезентативной. Люди в возрасте от 40 до 50 лет едва ли проявят интерес к программе, ориентированной на подростковую аудиторию. При использовании такой выборки рейтинг может сильно упасть, но это не отразит реального положения вещей.

744. а) Больше всего было продано 3,5%-ного молока (30% от общего количества). Это самый популярный сорт молока.

б) Полностью обезжиренное молоко составляет 10% от общего количества проданного молока.

в) В таблицу частот нужно вписать количество проданного молока для каждой жирности (в литрах). Чтобы определить количество проданного молока данной жирности, нужно 40 000 л умножить на процент продаж, соответствующий данной жирности (его следует найти по диаграмме). Итак, получим следующую таблицу:

Жирность (%)	0	0,5	1,0	1,5	2,5	3,5	5,0
Количество (л)	4000	2000	2000	6000	8000	12 000	6000

г) Средний процент жирности:

$$\frac{0 \cdot 10 + 0,5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1,5 \cdot 15 + 2,5 \cdot 20 + 3,5 \cdot 30 + 5 \cdot 15}{100}\% = 2,6\%.$$

745. Составим таблицу числа повторений для данной выборки.

Число комнат	1	2	3	4	5	6
Число людей, их имеющих	30	35	15	10	5	5

Частоту найдём, разделив количество ответов в каждом столбце на общее количество ответов (оно равно 100 — это ясно из условия):

Число комнат	1	2	3	4	5	6
Относительная частота (%)	30	35	15	10	5	5

Таким образом, мы видим, что данные выборки соответствуют приведённой диаграмме.

746. а) Пусть на самолётах компании *DEF* произошло x аварий. Тогда на самолётах компании *ABC* произошло $3x$ аварий, и на самолётах компании *GHI* — $6x$ аварий. Всего произошло $10x$ аварий. Частота происшествий на самолётах компании *DEF* составляет $\frac{x}{10x} = \frac{1}{10}$, т. е. 10%.

б) 60%.

в) Сначала составим таблицу частот:

Авиакомпания	*ABC*	*DEF*	*GHI*
Частота аварий (%)	30	10	60

Для построения диаграммы частот будем указывать название авиакомпании по горизонтальной оси, а частоту по вертикальной оси (рис. 5.2).

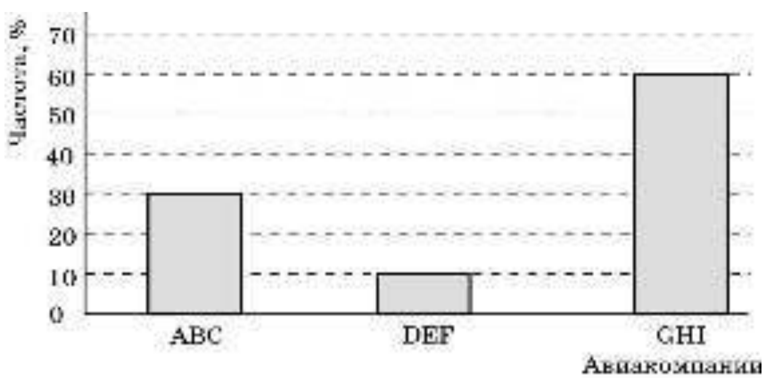

Рис. 5.2

г) Вычислим количество происшествий, используя таблицу из пункта «в».

Авиакомпания	*ABC*	*DEF*	*GHI*
Количество аварий	90	30	180

5.2. Интервальный ряд. Гистограмма

Методический комментарий

Общие рекомендации по изучению этого пункта те же, что и для п. 5.1. Важно, чтобы учащиеся не просто прочитали или прослушали рассуждения, рассмотренные в тексте, а выполнили бы все описанные этапы исследования. Здесь встречаются новые понятия — *интервальный ряд* и *гистограмма*, которые учащиеся осваивают на содержательном уровне по ходу выполнения исследования.

Обращаем внимание учителя на важную особенность рассматриваемого математического аппарата. Дело в том, что при построении интервального ряда можно по-разному разбивать его на промежутки. Поэтому при решении одной и той же задачи могут получаться разные гистограммы, а также различные средние арифметические (они зависят от способа упрощения ряда).

Если учитель посчитает целесообразным подчеркнуть эту особенность построения интервальных рядов, можно специально создать соответствующую ситуацию. Например, после того как будет рассмотрена задача из текста учебника, предложить учащимся построить необходимый для обработки данных интервальный ряд, разбив имеющийся промежуток на интервалы длиной не в 8 мин (как это сделано в учебнике), а в 6 мин. Такая работа может быть выполнена сразу после разбора примера из текста или в качестве домашнего задания. Вообще при построении интервального ряда годится любое разумное число промежутков и любая удобная длина интервалов.

Комментарий к упражнениям

747. Цель задачи — поупражняться в построении гистограмм. По горизонтальной оси указываем возраст, по вертикальной — количество людей (рис. 5.3).

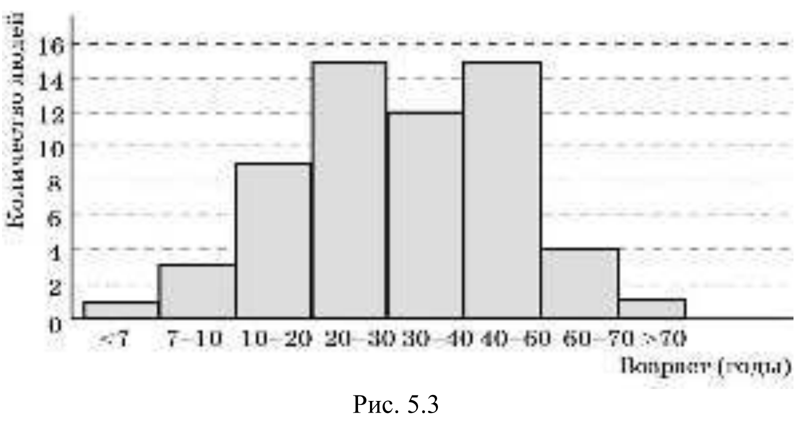

Рис. 5.3

748. а) Вычислим средние температуры за июнь, пользуясь срединными значениями интервалов:

2005 г.: $\dfrac{16\cdot 2+20\cdot 9+24\cdot 12+28\cdot 6+32\cdot 1}{2+9+12+6+1}=\dfrac{700}{30}=23\dfrac{1}{3}$ (ºС).

2010 г.: $\dfrac{16\cdot 1+20\cdot 6+24\cdot 15+28\cdot 3+32\cdot 5}{1+6+15+3+5}=\dfrac{740}{30}=24\dfrac{1}{3}$ (ºС).

Таким образом, средняя температура в июне 2010 г. была выше.

б) Гистограмма частот для 2005 г. изображена на рисунке 5.4.

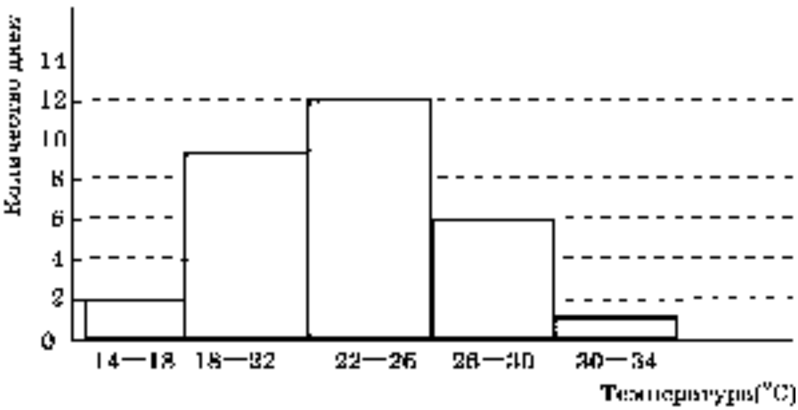

Рис. 5.4

749. а) Просмотр ряда показывает, что максимальное число вызовов лифта на этаж равно 29, минимальное равно 5. Так как 29 – 5 = 24, то размах ряда равен 24. Возьмём длину интервала, равную 4, а в качестве начала первого интервала число 3. Получаем следующие интервалы:

3—7, 7—11, 11—15, 15—19, 19—23, 23—27, 27—31.

б) Составим таблицу частот (значения, попадающие на границу, будем относить к интервалу справа):

Интервал вызовов	3—7	7—11	11—15	15—19	19—23	23—27	27—31
Число вызовов	5	12	16	18	18	12	9

в) Гистограмма приведена на рисунке 5.5.

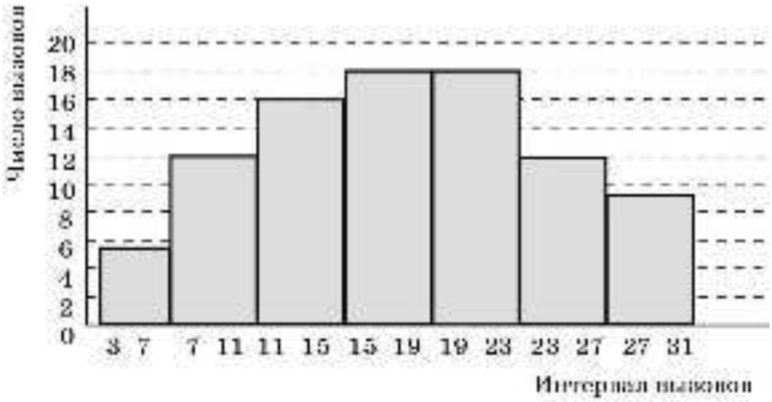

Рис. 5.5

750. а) Срединное значение для каждого интервала найдём как среднее арифметическое значений на концах интервала. Соответствующее значение количества квартир получим, умножив число 1500 на процент квартир для этого интервала.

Например, для интервала от 25 до 35 срединное значение равно $\frac{25+35}{2} = 30$. По гистограмме определяем, что квартиры такой площади составляют 20%. Количество квартир получаем, умножив 1500 на 20%: $1500 \cdot 0{,}2 = 300$.

Срединное значение	30	40	50	60	70	80
Количество квартир	300	450	300	225	150	75

б) Среднюю площадь квартиры найдём, воспользовавшись одним из образцов в объяснительном тексте учебника, например так:

$$30 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}15 + 70 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}05 = 48\ (\text{м}^2).$$

751. а) Более пятисот человек смотрят телевизор в периоды с 17 до 19 ч и с 20 до 23 ч. Показ передач начинается в 6 ч и заканчивается в 2 ч следующего дня. Таким образом, время вещания — 20 ч. Больше пятисот человек находятся у экранов в течение 5 ч. Это составляет $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, т. е. 25% всего времени показа.

б) Воспользуемся данными гистограммы. В течение трёх часов с 16 до 19 ч телевизор смотрели $500 + 550 + 600 = 1650$ человек. Следовательно, в среднем в этот период на час приходится $\frac{1650}{3} = 550$ человек. Они составляют $\frac{550}{1000}$, т. е. 55% от числа опрошенных.

5.3. Характеристики разброса

Методический комментарий

Учащимся уже известна простейшая характеристика разброса — это размах. В учебнике разъясняется, почему эта характеристика малоинформативна, и вводится ещё одна простейшая характеристика — отклонение от среднего арифметического. Здесь же разъясняется существенный недостаток новой характеристики: если ею необходимо пользоваться, когда чисел много, то желательно описывать разброс чисел в ряду с помощью одного числа. Далее вводятся понятия дисперсии и стандартного отклонения. Алгоритм вычисления стандартного отклонения разъяснён на примере 1.

В пункте приведены расчёты стандартного отклонения для двух числовых рядов, содержащих данные о зарплате на двух предприятиях. Подсчёт стандартного отклонения удобно выполнять с помощью таблицы. В учебнике эта таблица дана в готовом виде, но, естественно, заполнять её надо пошагово: сначала левый столбец, содержащий данные из рассматриваемого ряда, затем средний столбец, содержащий модули отклонений этих данных от их среднего арифметического, и наконец, правый столбец, содержащий их квадраты.

В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться разговором о необходимости характеристик разброса и рассмотрением отклонений от среднего арифметического. В более подготовленном классе можно продвинуться дальше. Пример 2 целесообразно рассмотреть при наличии времени с сильными учащимися. При этом ученики должны сами проделать все описанные в учебнике действия и сделать выводы.

Комментарий к упражнениям

754. Найдём среднее число опозданий электричек за неделю. Определив по диаграмме число опозданий в каждый из семи дней, получим

$$\bar{a}=\frac{2+3+4+5+4+2+1}{7}=3.$$

Теперь найдём стандартное отклонение. Для этого сначала составим таблицу:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Число опозданий, x	2	3	4	5	4	2	1
Отклонение $\lvert x-\bar{a}\rvert$	1	0	1	2	1	1	2
$\lvert x-\bar{a}\rvert^2$	1	0	1	4	1	1	4

Стандартное отклонение равно

$$\sqrt{\frac{1+0+1+4+1+1+4}{7}}=\sqrt{\frac{12}{7}}\approx 1{,}3.$$

Оно характеризует величину рассеивания ряда данных от среднего, т. е. от числа 3.

757. а) Средняя длина кирпича

$$\overline{a}=\frac{20,5+20,1+21,3+20,3+19,8+...+19,4+19,8+19,1+20,3}{20}=$$

$$=\frac{400}{20}=20\ \text{(см)}.$$

б)

Длина кирпича, x	$\lvert x-\overline{a}\rvert$	$\lvert x-\overline{a}\rvert^2$
20,5	0,5	0,25
20,1	0,1	0,01
21,3	1,3	1,69
20,3	0,3	0,09
19,8	0,2	0,04
19,2	0,8	0,64
20,1	0,1	0,01
19,6	0,4	0,16
20,2	0,2	0,04
20	0	0
20,5	0,5	0,25
19,7	0,3	0,09
19,9	0,1	0,01
20,5	0,5	0,25
19,6	0,4	0,16
20,1	0,1	0,01
19,4	0,6	0,36
19,8	0,2	0,04
19,1	0,9	0,81
20,3	0,3	0,09

Стандартное отклонение

$$\sigma=\sqrt{\frac{0,25+0,01+1,69+0,09+0,04+...+0,36+0,04+0,81+0,09}{20}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{20}}=\frac{1}{2},$$

т. е. $\sigma = 0,5$ см.

в) Из 20 кирпичей длина отличается от средней более чем на 0,2 см у 12 штук, которые составляют $\frac{12}{20}$ = 60% от общего количества. На величину, большую чем стандартное отклонение, длина от средней отличается у 4 штук. Это составляет 20% от общего числа.

758. а), б) Все числа в ряду одинаковы.

759. а) Пусть в ряду содержится n данных: x_1, x_2, x_3, …, x_n. И пусть их среднее арифметическое равно a. Тогда данные числового ряда можно представить в виде $a + d_1$, $a + d_2$, $a + d_3$, …, $a + d_n$, где d_n — отклонение от среднего, которое может быть и положительным, и отрицательным, и равным нулю.

Вычислим среднее арифметическое членов ряда:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=\frac{(a+d_1)+(a+d_2)+...+(a+d_n)}{n}=$$

$$=\frac{an+(d_1+d_2+...+d_n)}{n}=a+\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}.$$

Но согласно договорённости среднее арифметическое равно a. Значит,

$$\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}=0, \text{ т. е. } d_1+d_2+\ldots+d_n=0.$$

5.4. Статистическое оценивание и прогноз

Методический комментарий

В пункте на конкретных примерах показано применение понятий частоты и вероятности для количественной оценки прогнозируемого события. В ходе рассмотрения примеров, приводимых в объяснительном тексте учебника, и решения задач учащиеся повторят материал, связанный с нахождением относительной частоты случайного события, а также вероятности случайного события, повторят приёмы решения комбинаторных задач. В определённом смысле материал этого пункта позволяет повторить и систематизировать значительный объём материала соответствующей линии.

Уровню обязательных требований соответствует задача, разобранная в примере 1. Примеры 2, 3 и 4 можно отнести к повышенному уровню, однако разобрать примеры 3 и 4 полезно со всеми учащимися. В слабом классе можно ограничиться решением задач из раздела **А**. Решение задач этого пункта требует применения калькулятора.

Комментарий к упражнениям

Упражнения **761—763** (раздел **А**) и **767** (раздел **Б**) связаны с примером 1 из объяснительного текста учебника, упражнения **764** и **766** направлены на повторение некоторых общих представлений о равновероятных событиях, и, наконец, упражнения **767**, **768** и **769** (раздел **Б**) развивают соответственно примеры 2, 3 и 4.

761. Задача дублирует пример 1 из текста и решается с помощью тех же рассуждений. По результатам контроля можно оценить вероятность появления неисправной лампочки: $P = \frac{2}{200} = 0{,}01$. Поэтому среди 2500 лампочек можно ожидать примерно $2500 \cdot 0{,}01 = 25$ неисправных лампочек.

762. Эта задача аналогична предыдущей, но вопрос поставлен в терминах вероятности. Вероятность того, что наудачу (т. е. случайным образом) выбранный ученик получит пятёрку, приближённо равна относительной частоте появления этого события в представительной выборке: $P = \dfrac{660}{3000} = 0{,}22$, т. е. примерно 22%.

763. Так как частота попадания в мишень равна 0,6, то частота промахов равна 0,4. Если всего было сделано N выстрелов, то $\dfrac{100}{N} = 0{,}4$. Отсюда $N = 250$.

764. Вероятность выигрыша в любом розыгрыше лотереи одна и та же и зависит от того, сколько номеров участвует в розыгрыше и сколько среди них выигрышных, но не зависит от того, принимал человек участие в предыдущих розыгрышах или нет. Поэтому рассуждение неверно.

766. Последняя цифра в номере телефона может быть любой, поэтому в худшем случае придётся перебрать все 10 цифр, т. е. сделать 10 попыток. Для любой из попыток вероятность стать удачной одинакова, т. е. вероятности набрать нужный номер с первой попытки или с десятой равны.

767. Частота появления белого шара в серии вытаскиваний равна $\dfrac{18}{60} = 0{,}3$. Можно считать, что вероятность вытащить белый шар из коробки равна 0,3. Поэтому можно ожидать, что в коробке находится $100 \cdot 0{,}3 = 30$ белых шаров.

768. При решении этой задачи надо следовать схеме, рассмотренной в примере 2 текста учебника. А именно: 1 января — это один из 365 дней, следовательно, для случайно выбранного человека вероятность попадания его дня рождения на 1 января равна $\dfrac{1}{365}$. Значит, следует ожидать, что среди 12 млн жителей Москвы имеется $12\,000\,000 \cdot \dfrac{1}{365} \approx 12\,000\,000 \cdot 0{,}0027 = 32\,880$, т. е. примерно 33 тыс. человек, день рождения которых приходится на первый день года.

769. Образцом решения является пример 3 из текста учебника. Трудность заключается во втором вопросе этой задачи, в котором нужно интерпретировать случай, когда среди выловленных повторно рыб нет ни одной помеченной. Однако ответ на первый вопрос является основой для ответа на второй.

Сначала, следуя схеме примера 3, найдём ответ на первый вопрос задачи. Обозначим общую численность рыбы в озере буквой N. Тогда $\dfrac{64}{N} \approx \dfrac{1}{50}$. Отсюда $N \approx 3200$.

Если бы не попалось ни одной помеченной рыбы, то это означало бы, что рыб в озере больше, чем 3200. Этот вывод можно получить и формальными вычислениями. Если бы при повторном отлове не попалось ни одной помеченной рыбы, то значит, вероятность поймать помеченную рыбу была бы меньше $\dfrac{1}{50}$. Имеем $\dfrac{64}{N} < \dfrac{1}{50}$, отсюда $N > 3200$ (последнее неравенство получено из первого умножением обеих его частей на $50N$).

770. Для решения задачи надо составить таблицу, аналогичную таблице в примере 4. Для этого сначала учащиеся должны определить, какое наименьшее число очков может выпасть при бросании трёх кубиков ($1 + 1 + 1 = 3$) и какое наибольшее ($6 + 6 + 6 = 18$), а затем для каждой суммы очков выписать все возможные варианты. В итоге из таблицы они смогут увидеть, что наиболее вероятное значение суммы выпавших очков — это 10 и 11 (возможности их появления равны, каждая из них может выпасть в 27 случаях).

5.5. Вероятность и комбинаторика (*Узнайте больше*)

Методический комментарий

Материал этого пункта существенно опирается на знания, полученные учащимися в 8 классе. Он позволяет вернуться к решению задач на вычисление вероятности события в классической модели и восстановить некоторые комбинаторные умения. Есть и небольшое продвижение в теоретическом плане: знакомство с формулой вероятности противоположных событий. Одновременно формализуется интуитивно знакомое понятие противоположных событий.

Пример 1 в объяснительном тексте — вводный; он служит для разъяснения содержания понятия «противоположное событие». Пример 2 — это задача на применение новой формулы. В примере 3 разбирается задача, которая знакома каждому, кто изучал теорию вероятностей. Интересна она тем, что в зависимости от того, возвращается или нет вынутый шар в урну, возникают разные стратегии решения. Если возвращается, то ученики могут ответить на вопрос, проведя элементарный математический подсчёт, основанный на классическом определении вероятности. Если нет, то точный расчёт соотношения шансов для учеников недоступен, и к ответу они приходят путём содержательных соображений, интуитивно понимая, как меняется ситуация с вынимание каждого следующего шара. Подчеркнём, что именно своей неоднозначностью и интересна эта задача.

Комментарий к упражнениям

771. Всего имеем $6 \cdot 6 = 36$ исходов эксперимента. Исходов, когда выпадает одинаковое число очков, будет шесть: 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6. В этом случае вероятность равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Вероятность выпадания разного (т. е. неодинакового) числа очков можно найти, воспользовавшись формулой вероятности противоположных событий: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

О т в е т: $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$.

772. Случаи «а» и «б» подробно рассмотрены в учебнике для 8 класса.

а) $6 \cdot 6 = 36$.

б) Число благоприятных исходов можно найти непосредственным перебором; оно равно 15. Поэтому вероятность равна $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

в) Это событие противоположно событию, рассмотренному в пункте «б»; его вероятность равна $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$.

773. Нетрудно осуществить перебор всех возможных вариантов. Их всего восемь: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. (Понятно, что к этому же выводу можно прийти и с помощью правила умножения: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.)

а) 8; б) $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; в) $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

774. *Выбор без возвращения*. Общее количество исходов находим по правилу умножения: $36 \cdot 35$. Теперь подсчитаем исходы, когда обе карты одного цвета. Для первой карты имеем 36 вариантов, а для второй карты (если мы хотим, чтобы она была того же цвета, что и первая) — 17 вариантов. Значит, количество благоприятных исходов равно $36 \cdot 17$. Искомая вероятность равна $\frac{36\cdot 17}{36\cdot 35}=\frac{17}{35}\approx 0,486$.

Выбор с возвращением. Отличие в том, что можно повторно вытянуть ту же карту. Поэтому общее число исходов будет $36 \cdot 36$, а количество благоприятных исходов $36 \cdot 18$. Искомая вероятность в этом случае равна $\frac{36\cdot 18}{36\cdot 36}=\frac{1}{2}$.

775. Всего в шкафу 6 ботинок. Вытащить один за другим два ботинка можно $6 \cdot 5 = 30$ способами. Теперь определим число благоприятных исходов. Первый ботинок можно вытащить 6 способами, а второй — только одним способом (иначе они не будут парными), т. е. всего имеем $6 \cdot 1 = 6$ способов. Искомая вероятность равна $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0,2$.

776. Общее количество номеров из трёх любых цифр равно $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. (Первая цифра может быть любой из десяти, вторая и третья — также любой из десяти.)

Будем искать число вариантов, когда номер не содержит ни одной цифры 3. Так как первая цифра — любая из девяти, вторая — любая из девяти и третья — любая из девяти, то число благоприятных исходов равно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

Вероятность события «номер не содержит ни одной цифры 3» равна $\frac{729}{1000}=0,729$. Тогда вероятность события «номер содержит хотя бы одну цифру 3» равна $1 - 0,729 = 0,271$.

Дополнительные задания

Комментарий к упражнениям

790. а) Составим таблицу числа повторений:

Число неразгаданных слов	1	2	3	4
Число ребят, их не отгадавших	3	6	6	3

Составим таблицу частот:

Число неразгаданных слов	1	2	3	4
Частота	$\frac{3}{18}=\frac{1}{6}\approx$ 17%	$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}\approx$ 33%	$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}\approx$ 33%	$\frac{3}{18}=\frac{1}{6}\approx$ 17%

б) Для построения полигона частот будем откладывать количество неразгаданных слов по горизонтальной оси, а частоту — по вертикальной оси; отмеченные точки соединим последовательно отрезками (рис. 5.6).

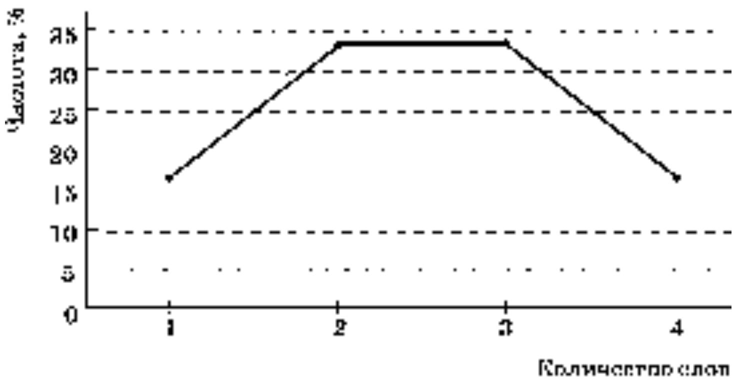

Рис. 5.6

в) Всего кроссворд разгадывали 18 ребят. Не разгадать более двух слов означает не разгадать три или четыре слова. Таких ребят 9. Они составляют $\frac{9}{18}$, т. е. 50% детей.

г) Среднее число неразгаданных слов равно

$$\frac{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot6+4\cdot3}{3+6+6+3}=\frac{45}{18}=2\frac{1}{2}.$$

791. а) Для каждой гласной алфавита подсчитаем, сколько раз она встречается в тексте.

Гласная	А	Я	У	Ю	О	Ё	Ы	И	Э	Е
Число повторений	23	5	21	3	46	2	8	24	0	35

Из таблицы видно, что гласная О действительно встречается в тексте чаще, чем любая другая гласная.

б) Всего в стихотворении

$$23 + 5 + 21 + 3 + 46 + 2 + 8 + 24 + 0 + 35 = 168 \text{ гласных.}$$

Частота буквы У равна $\frac{21}{168}$. Частота буквы И равна $\frac{24}{168}$. Следовательно, частота буквы И больше.

в) Сначала найдём частоту появления каждой из букв, выразив её в процентах:

Гласная	А	Я	У	Ю	О	Ё	Ы	И	Э	Е
Частота (%)	14	3	13	2	28	1	5	14	0	21

Теперь построим полигон частот (рис. 5.7).

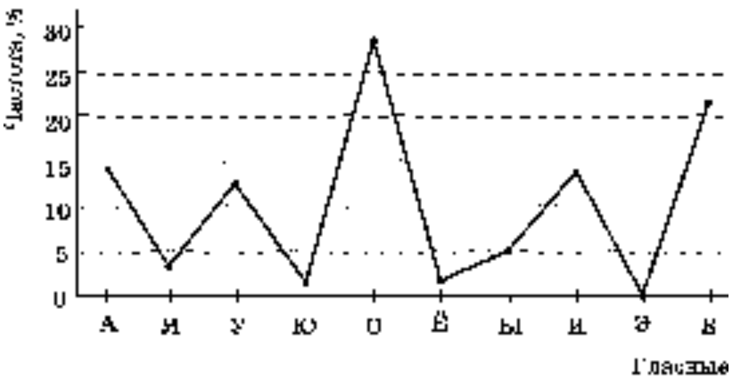

Рис. 5.7

792. а) Снимая данные с графика, учащиеся сначала должны заполнить вторую строку, т. е. для каждого выделенного интервала определить количество дней, для которых число случившихся ДТП укладывается в этот интервал. Затем можно заполнить строку частот. Таблица может иметь такой вид:

Интервалы числа ДТП	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50
Количество дней	1	5	11	8	4	2
Частота (%)	3	16	35	26	13	6

б) Гистограмма частот изображена на рисунке 5.8.

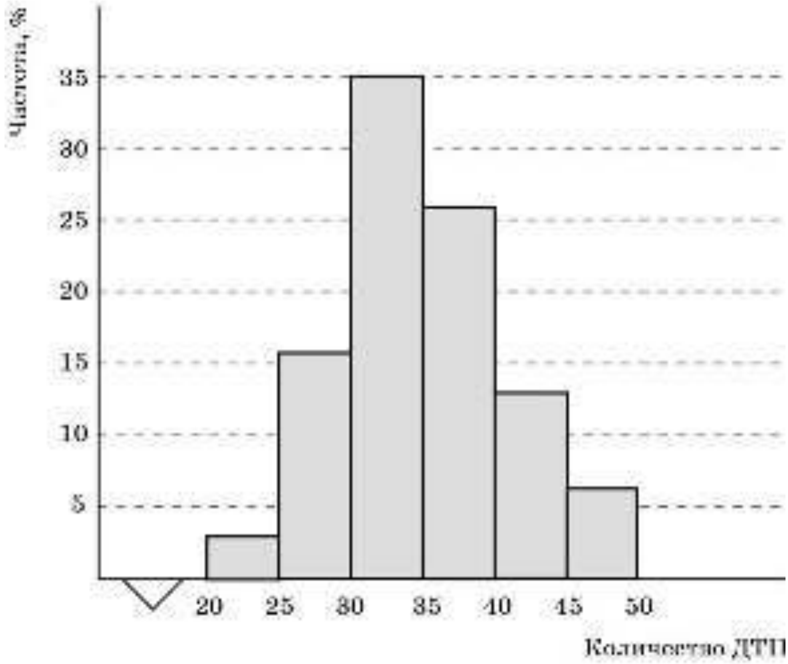

Рис. 5.8

в) Определим среднее количество ДТП в день:

$$\frac{22+27\cdot 5+32\cdot 11+37\cdot 8+42\cdot 4+47\cdot 2}{31}\approx 34,4.$$

Можно при вычислении среднего арифметического действовать и по-другому: определить общее число ДТП за месяц, сняв данные с графика, затем разделить полученное число на 31. Но это более длинные вычисления.

793. а) Общее количество участников соревнований равно 80. Для вычисления среднего арифметического возьмём середину каждого интервала и соответствующее этому интервалу число участников:

$$\frac{162,5\cdot 5+167,5\cdot 12+172,5\cdot 19+177,5\cdot 25+182,5\cdot 10+187,5\cdot 7+192,5\cdot 2}{80}=$$

$$=175,75\approx 176.$$

б) Если из ростов участников составить ранжированный ряд, то в нём будет 80 чисел; медиана ростов есть среднее арифметическое 40-го и 41-го членов этого ряда. Поэтому надо найти, в какие интервалы попадают числа с этими номерами. Последовательным суммированием числа участников выясним, что оба эти члена попадают в интервал [175; 180). Значит, и медиана находится в этом интервале.

794. Выигрыши равновероятны.

795. С первым участником согласиться нельзя. Орёл не обязан дальше выпадать чаще, чем решка. Хотя события «выпал орёл» и «выпала решка» равновероятны, разница между числом выпаданий того и другого в реальном опыте может оказаться достаточно большой. Как говорят математики, «у монеты нет памяти». По сути, первый участник изложил типичную бытовую (и ошибочную!) трактовку так называемого закона больших чисел. Этот закон гласит, что с увеличением числа испытаний частота события стремится к его вероятности. С ним на содержательном уровне учащиеся познакомились в предшествующих классах.

Утверждение второго участника тоже ошибочно. Однако некоторая житейская логика в этом утверждении есть: если и в самом деле решка настойчиво выпадает чаще, то может возникнуть подозрение, что так «устроена» монета, т. е. что она неправильная.

С рассуждением третьего участника следует согласиться.

796. Вова утверждает, что не выучил 20% экзаменационных вопросов, т. е. $60 \cdot 0{,}2 = 12$ вопросов.

Выбрать 3 вопроса из 60 можно $60 \cdot 59 \cdot 58$ способами. Выбрать 3 вопроса из 12 невыученных можно $12 \cdot 11 \cdot 10$ способами. Найдём вероятность события «все три вопроса, выбранные папой случайным образом, оказались из числа 12 невыученных»:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{60 \cdot 59 \cdot 58} \approx 0{,}0064.$$

Таким образом, вероятность этого события меньше 1%, т. е. оно маловероятно. У папы есть основания подозревать Вову во лжи.

797. У Олега, так как выпадание любого числа очков от 1 до 6 равновероятно.

798. При бросании трёх кубиков всего возможно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ исходов.

а) В этом случае имеется 6 благоприятных исходов (на всех кубиках выпало по одному очку или по 2 очка и т. д.). Вероятность того, что на всех кубиках выпадет одинаковое число очков, равна $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

б) Ученики могут подумать, что события, рассматриваемые в пунктах «а» и «б», равновероятны, но на самом деле это не так.

Найдём число благоприятных исходов. Так как все три числа на кубиках должны быть разные, то для первого кубика возможны 6 исходов, для второго — 5, для третьего — 4. Искомая вероятность равна $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$.

799. Согласно правилу умножения существует 12^{12} способов выбрать месяцы рождения для участников компании (для первого участника существует 12 способов, для второго — тоже 12 способов и т. д.). Из них благоприятными, т. е. когда все дни рождения приходятся на разные месяцы, будут 12! способов (для первого участника возможны 12 способов, для второго остаётся 11 способов, для третьего — 10 способов и т. д.). Значит, искомая вероятность равна $\frac{12!}{12^{12}}$.

800. Число способов, которыми можно посадить в ряд 7 человек, равно 7!. Подсчитаем число благоприятных исходов, когда девочки будут сидеть рядом. Для этого воспользуемся комбинаторным приёмом, известным из курса 7 класса. Будем условно считать девочек за одного человека, тогда рассадить в ряд нужно будет 6 человек. Число способов, которыми это можно сделать, равно 6!. Но девочки в каждом из способов размещения ребят на скамейке могут меняться местами. Поэтому число исходов, когда девочки будут сидеть рядом, вдвое больше, т. е. оно равно $2 \cdot 6!$.

Искомая вероятность равна $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

801. а) Возможно такое решение. Будем искать вероятность противоположного события: «с трёх попыток угадать число не удалось».

Всего существует $10 \cdot 9 \cdot 8$ способов назвать три числа от 1 до 10. Найдём число благоприятных исходов для указанного события. Так как задуманное число не должно входить в тройку названных чисел, мы его исключим; останется 9 чисел. Значит, существует $9 \cdot 8 \cdot 7$ способов выбрать три числа из этих девяти. Вероятность события «число с трёх попыток не угадано» равна $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 0{,}7$. Следовательно, вероятность противоположного события «число с трёх попыток угадано» равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

б) 6 попыток.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Язык и логика

Логика — это учение о способах рассуждения. Математическая логика исследует способы рассуждения, применяемые в математике. Начиналась математическая логика с анализа того, как люди говорят и рассуждают на естественных языках: выстраивают цепочки умозаключений, делают выводы, доказывают или опровергают различные утверждения и т. д. Рассматривая некоторые простейшие понятия математической логики, мы тоже будем апеллировать к нашему разговорному русскому языку.

1. Высказывания и предложения с переменной

Начнём с рассмотрения простых повествовательных предложений. Возьмем такие три предложения:

1) Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ является подмножеством множества целых чисел $\boldsymbol{Z}$.

2) Сумма $1+\sqrt{5}$ больше 4.

3) Значение выражения $2\sqrt{a}$ — число иррациональное.

Каждое из них выражает некоторую мысль, что-то утверждает. Первое предложение — верное утверждение, второе — неверное, а третье предложение при одних значениях a верно, а при других нет (например, при $a = 2$ оно верно, а при $a = 4$ — неверно).

Предложение, о котором можно сказать, верно или неверно содержащееся в нём утверждение, в математике называют **высказыванием**. При этом вместо слов «верно» и «неверно» обычно говорят «истинно» и «ложно». Таким образом, первые два предложения — это высказывания (истинное и ложное соответственно). А третий пример — это не высказывание, а **предложение с переменной**. Оно становится высказыванием — истинным или ложным — после того, как вместо переменной a будет подставлено какое-нибудь конкретное её значение. (Предложения с переменными часто называют *высказывательными формами* — «формами для производства высказываний», как в промышленности, где для штамповки изделий используются заранее изготовленные формы.)

С предложениями с переменными вы постоянно имеете дело при изучении математики, а «главными» школьными примерами предложений с переменными являются уравнения и неравенства. Например, уравнение $x^2 = 4$ и неравенство $x^2 < 4$ — это предложения с переменной x.

Предложение может содержать не одну, а две и более переменные. Вот примеры: $2x + 5y = 10$; $a^2 + b^2 = c^2$; точки X, Y равноудалены от концов отрезка a. Чтобы такое предложение стало высказыванием, нужно вместо *каждой* переменной подставить её конкретное значение (как говорят, *фиксировать* каждую переменную).

Предложения с переменными (высказывательные формы), как и другие понятия математического языка, имеют свой способ обозначения. Так, предложения с одной переменной обычно обозначают символами типа $P(x)$, $Q(x)$, употребляя для этого прописные латинские буквы.

Множество значений переменной (или переменных), при которых предложение с переменной обращается в истинное высказывание, называется **множеством истинности** этого предложения. Для уравнений и неравенств множеством истинности является множество их решений. Например, множество истинности уравнения $x^2 = 4$ есть $\{-2; 2\}$, а множество истинности неравенства $x^2 < 4$ — интервал $(-2; 2)$.

Упражнения

1. Определите, какие из приведённых предложений являются высказываниями; какие из них истинны и какие ложны:

1) $3^4 = 81$;
2) $3^n = 81$;
3) Число 7 имеет больше двух делителей;
4) Число n имеет больше двух делителей;
5) $2x+3y=8$ при любых значениях x и y;
6) Существуют такие значения x и y, при которых $2x+3y=8$;
7) $\sqrt{5}$ — иррациональное число;
8) $\sqrt{a}$ — иррациональное число.

2. Для каждого предложения с переменными приведите, если возможно, примеры значений этих переменных, при которых оно обращается в исинное высказывание; в ложное высказывание:

а) $x^2+3x-4=0$; в) $(x^2-1)^2+y^2=0$;

б) $x^2 \geq 25$; г) точка $(a; b)$ принадлежит графику функции $y=x^2$.

Ответы: **1.** Истинные высказывания: 1, 6 и 7. Ложные высказывания: 3 и 5. **2.** Здесь приведены отдельные примеры, примеры учащегося могут быть другими. а) При $x = 1$ — истинное высказывание, при $x = 0$ — ложное; б) истинное при $x = -10$; ложное при $x = 3,5$; в) истинное при $x = 1$, $y = 0$; ложное при $x = 1$, $y = 2,7$; г) истинное при $a = -1$, $b = 1$; ложное при $a = -1$, $b = -1$.

2. Логические связки «и» и «или»

Высказывания, как и предложения обычного языка, бывают простыми и сложными. В естественном языке при конструировании сложных предложений мы используем различные союзы. Важную роль они играют и в математических текстах.

Вы систематически пользуетесь в математике союзами «и» и «или». В математической логике эти союзы называют логическими связками. Приведём несколько примеров.

Двойное неравенство $4<x<10$ — это предложение с переменной, которое означает: «$x>4$ **и** $x<10$».Это предложение истинно, когда истинны оба составляющие его неравенства, и ложно, когда хотя бы одно из них ложно. Например, при $x = 5$ истинны оба неравенства, а значит, и двойное неравенство; при $x = 1$ первое из них ложно, а значит, ложно и исходное двойное равенство. Иными словами, множество истинности предложения «$x > 4$ **и** $x < 10$» — это пересечение множеств истинности предложений «$x > 4$» и «$x < 10$».

Система уравнений и система неравенств — тоже примеры предложений с переменными со связкой **и**. И система уравнений, и система неравенств истинны тогда и только тогда, когда истинны все составляющие их уравнения или неравенства. По традиции фигурная скобка, обозначающая систему, заменяет союз **и**.

Таким образом, *предложение с переменной* «$P(x)$ **и** $Q(x)$» *истинно при тех и только тех значениях x, при которых истинны оба составляющие его предложения*. Во всех остальных случаях, т. е. когда хотя бы одно из них ложно, это предложение ложно. Множество истинности предложения «$P(x)$ **и** $Q(x)$» есть пересечение множеств истинности составляющих его $P(x)$ и $Q(x)$.

Примером использования связки **или** может служить нестрогое неравенство: $x \geq 7$. Оно означает: «$x > 7$ **или** $x = 7$». Это предложение истинно, когда истинно хотя бы одно из составляющих его простых предложений, и ложно, когда ложны оба. Так, при $x = 7$ предложение истинно, а при $x = 0$ — ложно.

Ещё один пример предложения с переменной, в котором используется логическая связка **или**, — это уравнение, в левой части которого произведение двух или более множителей, а в правой — число 0. Например, $(x^2-4)(x^2-5x+6)=0$. Произведение $(x^2-4)(x^2-5x+6)$ равно нулю в том и только том случае, когда равен нулю хотя бы один из множителей, т. е.

$$x^2-4=0 \ \textbf{или} \ x^2-5\text{x}+6=0.$$

Таким образом, *предложение с переменной* «$P(x)$ **или** $Q(x)$» *истинно при тех и только тех значениях x, при которых истинно хотя бы одно из составляющих его предложений*. В остальных случаях, т. е. когда ложны оба, это предложение ложно. Множество истинности предложения «$P(x)$ **или** $Q(x)$» есть объединение множеств истинности $P(x)$ и $Q(x)$.

Приведём примеры.

Пример 1. Возьмём предложения $P(x)$ и $Q(x)$, где

$$P(x)\colon\ (x^2-x)^2=0,$$

$$Q(x)\colon\ (x^2-3x+2)^2=0.$$

Тогда уравнение $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0$ равносильно предложению «$P(x)$ **и** $Q(x)$», т. е.

$$(x^2-x)^2=0 \ \ \textbf{и} \ \ (x^2-3x+2)^2=0.$$

Если A — множество истинности (множество решений) предложения $P(x)$, B — множество истинности (множество решений) предложения $Q(x)$, то множество истинности предложения $P(x)$ **и** $Q(x)$ есть $A \cap B$ (рис. 1).

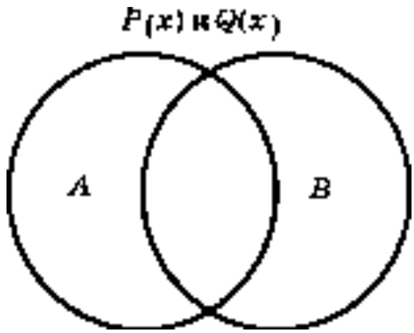

Рис. 1

Найдите сами множество истинности этого предложения.

Пример 2. Возьмём предложения $P(x)$ и $Q(x)$, где

$$P(x):\ (x^2 - x) = 0\,,$$

$$Q(x):\ (x^2 - 3x + 2) = 0\,.$$

Уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 3x + 2) = 0$ равносильно предложению «$P(x)$ **или** $Q(x)$», т. е.

$$(x^2 - x) = 0 \ \textbf{или}\ (x^2 - 3x + 2) = 0.$$

И пусть A — множество истинности (множество решений) предложения $P(x)$, B — множество истинности (множество решений) предложения $Q(x)$.

Тогда множество истинности $P(x)$ **или** $Q(x)$ есть $A \cup B$ (рис. 2).

Найдите множество истинности этого предложения.

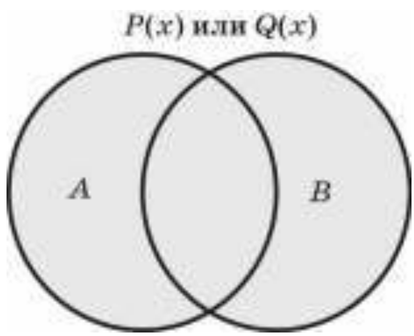

Рис. 2

Упражнения

3. Закончите фразу:

а) предложение P **и** Q истинно в том и только том случае, когда …;

б) предложение P **и** Q истинно в том и только том случае, когда … .

4. Буквами $F(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ обозначены предложения:

$$F(x)\colon\ x>4,\quad P(x)\colon\ x>12,\ \ Q(x)\colon\ x\le 7\,.$$

Определите множества истинности следующих предложений:

а) $F(x)$ **и** $P(x)$; в) $P(x)$ **и** $Q(x)$; д) $F(x)$ **и** $Q(x)$;

б) $F(x)$ **или** $P(x)$; г) $P(x)$ **или** $Q(x)$; е) $F(x)$ **или** $Q(x)$.

5. Запишите каждое предложение с переменными, используя одну из связок: **и**, **или**. В каждом случае приведите примеры значений переменных из множества истинности предложения:

а) $x\ge 10$; в) $(x+2)(x-4)=0$; д) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3; \end{cases}$

б) $-3<a<1$; г) $(x+2)(y-4)=0$; е) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$.

О т в е т ы: **4.** а) $(4;\ +\infty)$; б) $(12;\ +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;\ 7)\cup(12;\ +\infty)$; д) $(4;\ 7]$; е) $(-\infty;\ +\infty)$. **5.** а) $x=10$ **или** $x>10$; б) $a>-3$ **и** $a<1$; в) $x+2=0$ **или** $x+4=0$; г) $x+2=0$ **или** $y-4=0$; д) $x+y=5$ **и** $x-y=3$; е) $x^2-4=0$ **и** $x+2\ne 0$.

3. Равносильность. Следование

Напомним, что два уравнения или неравенства называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений, т. е. если они истинны при одних и тех же значениях переменной (или переменных). Но уравнения и неравенства — это предложения с переменными некоторого частного вида, и в действительности понятие равносильности относится к произвольным предложениям с переменными. И определение равносильности для предложений с переменными — это буквальное повторение соответствующего определения для уравнений и неравенств:

два предложения с переменными называются равносильными, если они истинны при одних и тех же значениях переменной (или переменных).

Приведём примеры равносильных предложений:

«Число n делится на 3» и «Сумма цифр числа n делится на 3»;

«Точка C лежит на серединном перпендикуляре отрезка AB» и «Отрезок AC равен отрезку BC»;

«$x^2+y^2=0$» и «$x=0$ и $y=0$».

На письме вместо слова «равносильно» употребляют символ $\Leftrightarrow$. Например: «$(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0$ и $y = 0)$». А в речи, кроме слова «равносильно», используют такие обороты , как «в том и только том случае», «тогда и только тогда». Например: «$x^2 + y^2 = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$ **и** $y = 0$».

С понятием равносильности связано ещё одно, быть может, важнейшее для математики логическое понятие — **следствие**. Это слово часто употребляется в обычном русском языке, и происходит оно от глагола «следует».

Приведём примеры ситуации следования одного предложения из другого:

«Из того, что число n делится на 4, следует, что оно делится на 2»;

«Из того, что $x > 2$, следует, что $x^3 > 8$»;

«Из того, что $x > 1$, следует, что $x + 5 > 6$».

В каждом из приведённых предложений *после* слов «следует, что» идёт собственно следствие, а то, что *перед* словами «следует, что», в логике обычно называют «посылкой», а в математике чаще всего называют *условием*.

На логическом языке ситуацию следствия записывают с помощью знака $\Rightarrow$. Например, пишут:

$$(n \text{ делится на } 4) \Rightarrow (n \text{ делится на } 2);$$

$$(x > 2) \Rightarrow (x^3 > 8);$$

$$(x > 1) \Rightarrow (x + 5 > 6).$$

Во всех этих случаях мы видим, что если верно первое утверждение, то верно и второе. Поэтому естественно дать следующее о п р е д е л е н и е:

Предложение $Q(x)$ называется следствием предложения $P(x)$, если при всяком значении переменной x, при котором высказывание $P(x)$ истинно, высказывание $Q(x)$ также истинно.

В устном математическом языке вместо термина *следствие* или слова *следует* чаще всего пользуются условными предложениями, сконструированными с помощью союза «если …, то …». Например, вместо утверждения «Из того, что сумма цифр числа n делится на 9, следует, что само число n делится на 9» говорят: «Если сумма цифр числа n делится на 9, то и само число n делится на 9».

Понятия равносильности и следствия, как и вообще многие логические понятия, тесно связаны с основными понятиями теории множеств.

Если множества истинности предложений $P(x)$ и $Q(x)$ обозначить соответственно через A и B, то, сопоставив определения равносильности и следствия с определениями подмножества и равенства множеств, получим:

$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

Например, пусть A — множество истинности предложения $P(x)$: «Натуральное число n кратно 6», а B — множество истинности предложения $Q(x)$: «Натуральное число n кратно 3». Тогда $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $A \subset B$ (рис. 3).

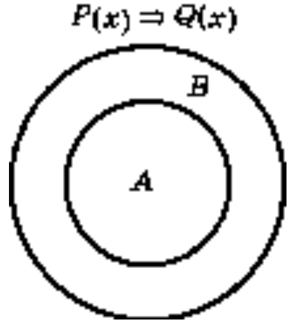

Рис. 3

Логика доказательства утверждения вида $P(x) \Rightarrow Q(x)$ такова: берут произвольное x, для которого истинна посылка $P(x)$, и доказывают, что для этого значения x истинно и заключение $Q(x)$. Именно такое рассуждение вы практически всегда применяли в геометрии, когда писали «Дано… Требуется доказать…», или в общем виде: «Дано $P(x)$, требуется доказать $Q(x)$».

Конечно, всё это относится и к алгебре. Например, при всей очевидности утверждения: «Из $x < 2$ следует, что $x < 5$», его доказательство проводится по той же стандартной схеме.

Явно формулируются условие и заключение: «Дано: $x < 2$. Требуется доказать, что $x < 5$». И уже после этой логической процедуры начинается собственно математика: так как $x < 2$, а $2 < 5$, то в силу *транзитивности* отношения «меньше» $x < 5$, что и требовалось доказать.

А что означает утверждение: $Q(x)$ *не следует* из $P(x)$? Утверждение $P(x) \Rightarrow Q(x)$ неверно в случае, если *не при всяком* значении переменной x, при котором высказывание $P(x)$ истинно, высказывание $Q(x)$ тоже истинно. Но это значит, что *существует* такое значение x, при котором $P(x)$ истинно, а $Q(x)$ ложно.

Например, утверждение $\frac{1}{x} < 3 \Rightarrow 3x > 1$ неверно. В самом деле, *не при всяком* значении переменной x, при котором высказывание $\frac{1}{x} < 3$ истинно, высказывание $3x > 1$ также истинно. Примером такого значения x может служить число -10.

А чтобы доказать утверждение $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, можно показать, что каждое из этих двух предложений является следствием другого. Такое рассуждение типично для математических доказательств и очень часто применяется в геометрии. Например, возьмём такие два предложения:

$P(x)$: «Четырёхугольник — параллелограмм»;

$Q(x)$: «Диагонали четырёхугольника в точке пересечения делятся пополам».

Тогда сначала доказывают утверждение $P(x) \Rightarrow Q(x)$ (обычно его называют свойством параллелограмма), а затем утверждение $Q(x) \Rightarrow P(x)$ (это утверждение называют признаком параллелограмма). После этого можно утверждать, что $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

Упражнения

6. Какие из предложений равносильны предложению «x — целое положительное число»?

1) x — целое число;
2) x — натуральное число;
3) x — целое неотрицательное число;
4) $x > 0$;
5) $x > 0$ **и** $x \in \mathbf{Z}$.

7. Верно ли утверждение?

а) (Отрезок MN — средняя линия трапеции) $\Leftrightarrow$ (Точки M и N — середины боковых сторон трапеции);

б) (Натуральное число n оканчивается цифрой 5) $\Leftrightarrow$ (Число n делится на 5);

в) (Парабола задана формулой $y = ax^2$, где $a > 0$) $\Leftrightarrow$ (Ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх);

г) (Два угла четырёхугольника равны) $\Leftrightarrow$ (Четырёхугольник — параллелограмм).

8. Определите, какое из двух предложений истинно и какое ложно; ответ обоснуйте:

а) $(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 1)$; $(x^2 > 1) \Rightarrow (x > 2)$;

б) $(x^2 = 16) \Rightarrow (x = 4)$; $(x = 4) \Rightarrow (x^2 = 16)$;

в) $\left(\frac{1}{x} < 1\right) \Rightarrow (x > 1)$; $(x > 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} < 1\right)$.

Для истинных предложений определите множество истинности посылки и следствия и установите, какое из них является подмножеством другого.

9. Предложение сформулировано с использованием слов «в том и только том случае». Запишите его с помощью двух условных предложений со связкой «если …, то …»:

а) Четырёхугольник является параллелограммом в том и только том случае, когда его противоположные стороны равны.

б) $x^2 + y^2 = 0$ в том и только том случае, когда $x^2 = 0$ **и** $y^2 = 0$.

в) Прямые $y = kx + 2$ и $y = mx - 1$ параллельны в том и только том случае, когда $k = m$.

г) Последовательность (a_n) с разностью d является арифметической прогрессией в том и только том случае, когда она может быть задана формулой вида $y = dn + b$.

О т в е т ы: **6.** а) 2 и 5. **7.** Истинны *а* и *в*. **8.** а) Истинно первое; б) истинно второе; в) истинно второе; **9.** а) Например, так: «Если четырёхугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны равны, и обратно, если противоположные стороны четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм».

4. Отрицание

Ещё одна важная логическая операция, с которой на самом деле вы часто встречаетесь как в математике, так и в жизни, — это **отрицание**. Возьмём, например, два утверждения (высказывания): «2 · 2 равно 4» и «2 · 2 не равно 4». Первое из них истинно, второе — ложно. Они *отрицают* друг друга, каждое из них является отрицанием другого.

Вообще *отрицание некоторого утверждения A — это новое утверждение, которое ложно, если A истинно, и истинно, если A ложно*. Обозначается отрицание знаком $\neg$. Например, отрицание высказывания A обозначается $\neg A$ и читается «не A» или «неверно, что A».

Так, если обозначить первое из рассмотренных выше утверждений буквой A, то $\neg A$ — это «2 · 2 не равно 4», и наоборот: если A — это «2 · 2 не равно 4», то $\neg A$ — это «2 · 2 равно 4».

Как вы видите, из двух утверждений A и $\neg A$ одно обязательно истинно, а другое ложно, и третьего не дано. Это закон логики, и он имеет специальное название — *закон исключённого третьего*.

Так как нам часто приходится формулировать отрицание и при изучении математики, и в повседневной жизни, надо научиться делать это правильно. Но сначала обратим внимание на одну особенность, связанную с высказываниями и предложениями с переменной. Рассмотрим, например, предложение с переменной $P(x)$: $x+3>5$. Оно превращается в высказывание, истинное или ложное, в зависимости от значения x.

Добавим перед этим предложением слова «*Для любых*», получим: «Для любых действительных чисел x: $P(x)$», что на естественном языке означает: «Для любых действительных чисел x выполняется неравенство $x+3>5$». Это уже высказывание, так как о нём можно определённо сказать, что оно ложно. Если же перед этим предложением $P(x)$ поставить слово «*Существует*», то получим: «Существует действительное число x, для которого выполняется неравенство $x+3>5$». Это истинное высказывание.

Таким образом, добавки «Для всех …» и «Существует …» обращают предложения с переменными в высказывания. Высказывания первого типа — «Для всех …» — принято называть общими утверждениями. В русском языке одну и ту же мысль можно выразить по-разному. Так и здесь: вместо слов «Для всех...» употребляют и другие обороты речи. Например: *для любого …*, *для каждого …* или *все …*, *любой …*, *всякий …*, *каждый …* . Высказывания типа «Существует …» называют утверждениями о существовании. Здесь вместо слова «существует» вполне применимы и такие синонимы, как *найдётся*, *имеется*, *хотя бы один*, *по крайней мере один* и т. д.

Вернёмся теперь к отрицанию. Формулировка отрицания некоторого утверждения определяется логической структурой этого утверждения. Рассмотрим сначала пример утверждения вида «Для всех …».

Пример 1. Сконструируем отрицание утверждения «Все натуральные чётные числа делятся на 4».

Можно было бы ошибочно подумать, что отрицанием этого утверждения является следующее: «Все натуральные чётные числа не делятся на 4». Но это, конечно, не так. Действительно, оба утверждения «Все натуральные чётные числа делятся на 4» и «Все натуральные чётные числа не делятся на 4» являются ложными. Но из двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого, одно должно быть ложным, а другое истинным.

Проще всего сформулировать отрицание утверждения можно, вставив слова «Неверно, что …»: «Неверно, что все натуральные чётные числа не делятся на 4». Это самая простая формулировка, и обычно используются другие формулировки, уточняющие смысл данной. Заметим, что исходное утверждение является *общим*, оно касается всех элементов некоторого множества (в данном случае — всех натуральных чётных чисел). В таких случаях всегда суть отрицания — *существование* элементов рассматриваемого множества (хотя бы одного), для которого рассматриваемое свойство не выполняется (в данном случае — делиться на 4). При этом употребляются слова: *существует*, *некоторые*, *хотя бы один*, *найдётся*, т. е. отрицание рассматриваемого утверждения может выглядеть так:

«Существует натуральное чётное число, которое не делится на 4»;

«Некоторые натуральные чётные числа не делятся на 4»;

«Хотя бы одно натуральное чётное число не делится на 4».

Напротив, в тех случаях, когда утверждается *существование* элементов множества, обладающих некоторым свойством, отрицанием служит утверждение *общего* характера. Суть отрицания в этом случае состоит в том, что все элементы данного множества не обладают данным свойством. При этом употребляют слова: *все*, *любой*, *всякий*, *каждый* и пр. Часто они употреблятся с предлогом «для».

Пример 2. Сконструируем отрицание утверждения «Некоторые квадратные уравнения не имеют корней».

Иногда за отрицание этого утверждения принимают следующее: «Некоторые квадратные уравнения имеют корни». Вы теперь легко сможете объянить, почему это не так: второе утверждение, так же как исходное, является истинным.

Формулировка «в лоб» такова: «Неверно, что некоторые квадратные уравнения не имеют корней». Чтобы сформулировать отрицание в уточняющем виде, заметим, что исходное утверждение эквивалентно такому: «Существуют квадратные уравнения, которые не имеют корней». Его отрицание — общее утверждение, оно может быть сформулировано, например, так:

«Все квадратные уравнения имеют корни»;

«Любое квадратное уравнение имеет корни»;

«Всякое квадратное уравнение имеет по крайней мере один корень».

Исходное утверждение истинно, его отрицание ложно.

Упражнения

10. Определите, какие из следующих утверждений являются отрицанием утверждения $P(x)$: «Для любых действительных чисел x выполняется неравенство $x+3>5$». Истинным или ложным является $P(x)$? $\neg P(x)$?

1) «Существует действительное число x, для которого выполняется неравенство $x+3\leq 5$».

2) «При любом действительном числе x неравенство $x+3>5$ неверно».

3) «Ни при одном действительном числе x не выполняется неравенство $x+3>5$».

4) «Найдётся действительное число x, при котором $x+3\leq 5$».

11. Для утверждения $P(x)$: «Существует действительное число x, при котором выполняется неравенство $x+3>5$» — сформулируйте $\neg P(x)$.

12. Сформулируйте отрицание для каждого из утверждений:

а) «Существуют действительные числа, квадрат которых — отрицательное число».

б) «Квадратный корень из любого натурального числа — натуральное число».

в) «Некоторые треугольники равнобедренные».

г) «Любой квадрат является ромбом».

д) «Найдётся равнобедренный треугольник, у которого углы при основании не равны».

е) «Все простые числа нечётные».

Ответы: **10.** 1) и 4). **11.** $\neg P(x)$: «Для любого действительного числа выполняется неравенство $x+3\leq 5$». **12.** а) «Квадрат любого действительного числа — неотрицательное число (или больше или равно 0)». б) «Найдётся натуральное число, квадратный корень из которого не является натуральным». в) «В любом треугольнике длины сторон разные». г) «По крайней мере один квадрат не является ромбом». д) «В любом равнобедренном треугольнике углы при основании равны». е) «Существует чётное простое число».

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Элементы статистики, теории вероятностей, комбинаторики

1. Независимые события

Напомним, что *несовместными* называются события, которые не имеют общих исходов, т. е. не пересекаются. Для несовместных событий справедлива *формула сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,.$$

Если события *совместны*, то эта формула усложняется:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

При наступлении одного из несовместных событий другое наступить не может — можно сказать, что его вероятность снижается до нуля. В этом смысле несовместные события сильно связаны друг с другом. Возможна и обратная ситуация: наступление события A никак не изменяет вероятность наступления другого события B. Чаще всего эта ситуация возникает, когда A и A связаны с разными испытаниями или разными объектами, участвующими в эксперименте. Такие события принято называть *независимыми*.

Для независимых событий справедлива *формула умножения вероятностей*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\,.$$

В этом разделе мы попробуем обосновать эту формулу и научимся использовать её при решении задач. Заодно разберёмся, в каких же случаях события независимы, а в каких нет. Для этого рассмотрим следующий пример, в котором мы введём понятие *условной вероятности*.

Пример 1. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара. Рассмотрим два события:

A = {первый шар белый},

B = {второй шар белый}.

Очевидно, что $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. А как вычислить $P(B)$? Если событие A произошло, то вероятность события B снижается до $\frac{1}{3}$, а если не произошло — наоборот, увеличивается до $\frac{2}{3}$. Мы сталкиваемся здесь с ситуацией, когда вероятность одного события *зависит* от того, произошло или не произошло другое событие. Две полученные дроби можно назвать *условными* вероятностями события B: первую — при условии, что A произошло, вторую — при условии, что A не произошло. Обозначаются они так:

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3} \qquad \text{и} \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{3}\,.$$

В общем случае *условной вероятностью* события B относительно события A (или вероятностью события B при условии, что событие A произошло) называется отношение

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Смысл этого отношения виден из диаграммы Эйлера (рис. 1): если событие A происходит, то множество n всех возможных исходов опыта сужается до множества A, а благоприятными для события B остаются только те из них, которые входят в пересечение событий $A \cap B$.

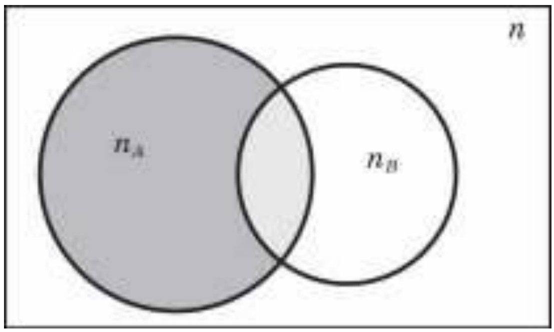

Рис. 1

Для опытов с равновозможными исходами условную вероятность можно по-прежнему вычислять как отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных, но *в новых условиях эксперимента*:

$$P(B \mid A) = \frac{n_{AB}}{n_A},$$

где n_A — количество исходов, благоприятных для A, n_{AB} — количество исходов, благоприятных для пересечения событий $A \cap B$.

Если из приведённого выше определения условной вероятности выразить $P(A \bigcap B)$, то получим *формулу умножения вероятностей* для произвольных событий A и B (требуется только, чтобы $P(A) \neq 0$):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Эта формула оказывается очень полезной при решении многих задач. В нашем примере с её помощью можно посчитать вероятность события C = {оба вынутых шара белые}. Поскольку $C = A \cap B$, то

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Вернёмся теперь к главному вопросу, ради которого мы ввели понятие условной вероятности: *какие же события можно считать независимыми*? Возможны следующие естественные ответы:

1) событие B не зависит от события A, если его условная вероятность относительно события A равна безусловной вероятности: $P(B) = P(B|A)$;
2) событие B не зависит от события A, если его условные вероятности относительно событий A и $\overline{A}$ одинаковые: $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$.

Замечательно, что любое из этих условий равносильно равенству, с которого мы начали этот раздел (см. задачу **8**): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Его словесная формулировка звучит так: *вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей*. Эта формула удобна ещё и тем, что, во-первых, в отличие от приведённых выше условий, она симметрична относительно событий A и B и, во-вторых, допускает равенство вероятностей A и B нулю. Поэтому в теории вероятностей выполнение этого равенства принимают за определение независимых событий. В задачах, которые мы будем рассматривать, независимость событий, как правило, будет следовать из условий самого эксперимента, а формула умножения — использоваться для вычисления вероятности $P(A \cap B)$.

Таким образом, как и для сложения вероятностей, существуют две формулы умножения вероятностей:

- для независимых событий — более простая:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$
- для произвольных событий — более сложная:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Вернёмся к примеру с шарами. Поскольку $P(B \mid A) = \dfrac{1}{3}$, а $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{2}{3}$, то $P(B \mid A) \neq P(B \mid \overline{A})$ и, следовательно, события A и B зависимы (интуитивно мы это и так понимали). Теперь изменим условия эксперимента и посмотрим, как это скажется на зависимости событий.

Пример 2. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара *с возвращением*. Это значит, что первый шар вынимают, записывают полученный результат (в данном случае цвет шара) и возвращают его обратно в ящик. После этого шары перемешивают и вынимают второй шар. Рассмотрим те же два события:

$$A = \{\text{первый шар белый}\},$$
$$B = \{\text{второй шар белый}\}.$$

Для события A ничего не изменилось, поэтому $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Но теперь и $P(B)$ вычисляется так же просто: ведь к моменту вытаскивания второго шара, независимо от того, произошло или нет событие A, в ящике снова 2 белых и 2 чёрных шара, поэтому

$$P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Как видим, события A и B стали независимыми, поэтому вероятность события C = {оба вынутых шара белые} вычисляется теперь как произведение вероятностей A и B:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Заметим, что случайную выборку двух шаров из примера 1 называют *бесповторной*, а из примера 2 — *повторной*. Эти термины часто используются в статистике при организации выборочного контроля на производстве, проведении социологических исследований и т. д.

Пример 3. Бросают два кубика. С какой вероятностью на первом выпадет 3 очка, а на втором 5 очков? Пусть A = {на первом кубике выпадет 3 очка}, B = {на втором кубике выпадет 5 очков}. Нужно найти $P(A \cap B)$. Поскольку события A и B связаны с разными кубиками, то можно считать их независимыми. По формуле умножения для независимых событий получаем:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Заметим, что эту задачу можно было решить и без использования независимости: у нашего опыта 36 равновозможных исходов, из которых только 1 исход благоприятен для события $A \cap B$. А вот в следующем примере без независимости уже не обойтись.

Пример 4. Вы покупаете 5 билетов лотереи. Вероятность выигрыша на один билет равна 0,2. С какой вероятностью хотя бы один билет выиграет?

Обозначим через A_1, …, A_5 события: «1-й билет выиграет», «2-й билет выиграет» и т. д. Событие «хотя бы один билет выиграет» равно объединению этих событий. Значит, нам нужно найти вероятность события $A = A_1 \cup ... \cup A_5$. Самая грубая ошибка, которая нас здесь подстерегает (и которую тем не менее делают очень часто), — воспользоваться формулой сложения для несовместных событий:

$$P(A) = P(A_1 \cup ... \cup A_5) = 0,2 + ... + 0,2 = 1.$$

Ответ абсурдный, поскольку события A_1, …, A_5 совместны. Как же всё-таки вычислить эту вероятность? Оказывается, нужно перейти к противоположному событию:

$$B = \overline{A} = \overline{A_1 \cup ... \cup A_5} = \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_5}.$$

В нашем примере оно означает, что все 5 билетов будут без выигрыша. Если считать события A_1, …, A_5 независимыми (мы ещё обсудим этот вопрос), то события $\overline{A_1}, ..., \overline{A_5}$ также будут независимыми, поэтому

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_5}) = P(\overline{A_1}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_5}) = 0,8^5 \approx 0,328,$$

откуда

$$P(A) = 1 - P(B) \approx 0,672.$$

Получив на этот раз правильный ответ, вернёмся к предположению о независимости событий A_1, …, A_5. Вообще говоря, оно сделано не совсем обоснованно: ведь купленные билеты назад не возвращаются, как шары из примера 2. Но если считать, что в тираже участвует намного больше пяти билетов, то эта зависимость будет практически неощутима. В самом деле, если мы купим один или даже пять билетов из миллиона, так ли сильно изменится соотношение выигрышных и проигрышных билетов в оставшейся совокупности?

Нужно отметить, что во многих реальных задачах предположение о независимости событий вообще выполняется, как правило, приближённо. Главное, чтобы это предположение не меняло сути самого опыта. Например, когда в примере 1 мы вытаскивали один за другим два шара без возвращения, то события A и B, конечно, нельзя было считать независимыми. На вопрос о независимости реальных событий не всегда просто ответить. Представим себе подъезд 5-этажного дома, в котором на каждом этаже горит лампочка. Пусть события A_1, …, A_5 заключаются в том, что в течение ближайшего месяца перегорит лампочка на 1-м этаже, на 2-м этаже и т. д. Будут ли эти события независимыми? С одной стороны, вроде бы да — ведь они связаны с разными объектами опыта. Но с другой стороны, задумаемся: отчего перегорают лампочки? Безусловно, главная причина — это их «старение», так называемый естественный износ. Но ведь бывает и так: большой скачок напряжения в подъезде — и сгорели сразу все включённые в этот момент лампочки. Значит, если произошло одно из событий A_i, вероятность других событий должна увеличиться? Как тогда найти соответствующую условную вероятность? Выходов здесь два: либо проводить статистические наблюдения и оценивать все эти вероятности по частоте, либо смириться с неточностью модели и предположить независимость событий.

Упражнения

1. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара. Найдите вероятность того, что:
а) первый шар будет белый, а второй чёрный;
б) шары будут одного цвета;
в) шары будут разного цвета.
Р е ш е н и е. а) $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$; в) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2. Из ящика, в котором находится 3 белых и 3 чёрных шара, вынимают наугад один за другим три шара. Найдите вероятность того, что:
а) все три шара белого цвета;
б) все три шара одного цвета;
в) белых шаров вынуто больше, чем чёрных.
Р е ш е н и е. а) $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{2}$.

3. Два охотника независимо друг от друга делают по одному выстрелу в одну и ту же цель. Вероятность попадания первого — 0,8, второго — 0,9. С какой вероятностью хотя бы один из выстрелов достигнет цели?
Р е ш е н и е. $1-(1-0,8)\cdot(1-0,9)=0,98$.

4. Монету бросают 5 раз.
а) С какой вероятностью все пять раз выпадет орёл?
б) С какой вероятностью выпадет хотя бы одна решка?

Р е ш е н и е. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; б) $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$.

5. Кубик бросают 5 раз.
а) С какой вероятностью все пять раз выпадет единица?
б) С какой вероятностью выпадет хотя бы одна шестёрка?

Р е ш е н и е. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{7776}$; б) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0,402$.

В лотерее «Спринт» около 5% билетов выигрышных. Вы купили два билета. С какой вероятностью: а) оба билета окажутся без выигрыша; б) хотя бы один билет выиграет?

Р е ш е н и е. а) $0,95^2 = 0,9025$; б) $1-0,9025 = 0,0975$.

6. Студенты Петров и Иванов посещают лекции независимо друг от друга, причём Петров чаще, чем Иванов. Установлено, что вероятность их совместного появления на лекции равна 0,02, а вероятность, что ни один не придёт на лекцию, — 0,72. Найдите вероятности появления на лекции для каждого студента.
Р е ш е н и е. Обозначим неизвестную вероятность для Петрова через x, для Иванова — через y. Из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 0,02 \\ (1-x)(1-y) = 0,72. \end{cases}$$

Решая её и учитывая, что $x > y$, получаем $x = 0,2$ и $y = 0,1$.

7. Докажите, что если $P(A) \neq 0$, то равенство $P(B) = P(B \mid A)$ равносильно равенству $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Р е ш е н и е. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$.

8. Докажите, что если $P(A) \neq 0$ и $P(\overline{A}) \neq 0$, то равенство $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ равносильно равенству $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Р е ш е н и е. Заметим, что любое событие B можно записать как объединение двух непересекающихся событий в виде $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, откуда $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$. Делаем равносильные преобразования:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})};$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)};$$

$$P(A \cap B) \cdot (1 - P(A)) = P(A) \cdot (P(B) - P(A \cap B));$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2. Комбинаторика и вероятность

Напомним, что в опытах с равновозможными исходами вероятность случайного события A вычисляется по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$, где n — общее число исходов опыта, а m — число благоприятных исходов для события A. В простых ситуациях, когда общее число исходов невелико и они могут быть явно перечислены, подсчёт n и m не представляет затруднений. В более сложных ситуациях, когда исходами опыта являются некоторые *комбинации* (например, наборы букв или цифр, пары шаров и т. д.), на помощь приходит комбинаторика с её правилами и формулами.

Важнейшим из них является *правило умножения*: если в комбинации из k элементов первый элемент можно выбрать N_1 способами, после чего второй — N_2 способами, третий — N_3 способами и т. д., то общее количество таких комбинаций будет $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_k$.

Пример 1. Номера российских автомобилей имеют вид БЦЦЦББ, где Ц — любая цифра от 0 до 9, Б — любая из двенадцати букв А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля все буквы и цифры будут разные?

Найдём общее количество номеров по правилу умножения:

$$n=12\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12.$$

Для подсчёта благоприятных номеров снова воспользуемся правилом умножения, только теперь будем учитывать то, что выбранные на предыдущих шагах буквы и цифры использовать нельзя:

$$m=12\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 11\cdot 10.$$

Теперь можем найти вероятность:

$$P(A)=\frac{12\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 11\cdot 10}{12\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12}=\frac{11}{20}=0,55.$$

Бывают ситуации, когда правило умножения не работает: количество вариантов для выбора очередного элемента комбинации зависит от того, какие именно элементы были выбраны перед этим. В этих случаях может выручить *правило сложения*: следует попытаться разбить все комбинации на непересекающиеся классы, подсчитать число комбинаций в каждом из них, а затем сложить эти количества. Как видим, это скорее стратегия, а не чёткое правило.

Пример 2. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля сумма первых двух цифр будет равна третьей цифре?

Прежде всего заметим, что про буквы в этой задаче можно забыть и считать, что номер автомобиля состоит из трёх цифр. Очевидно, что по правилу умножения подсчитать количество благоприятных комбинаций уже нельзя: для первой цифры 10 вариантов выбора, а для второй количество вариантов зависит от того, какая цифра была выбрана первой. В самом деле, если первая цифра 0, то для второй 10 вариантов, если первая цифра 1, то 9 вариантов (не подходит цифра 9, так как $1+9=10$) и т. д. Третья цифра после выбора первой и второй определяется при этом всегда однозначно.

Поэтому разобьём все благоприятные комбинации на 10 классов в зависимости от того, какая цифра в номере первая — от 0 до 9. Очевидно, эти классы не пересекаются, а количество комбинаций в каждом из них равно соответственно 10, 9, …, 1. Сложив все эти количества, получаем, что m = 10 + 9 + … + 1 = 55. Отсюда $P(A)=\dfrac{55}{10\cdot10\cdot10}=\dfrac{11}{200}=0{,}055$.

Одна из распространённых ошибок при использовании правила сложения — разбиение комбинаций на *пересекающиеся* классы и сложение полученных количеств.

Пример 3. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля либо все буквы, либо все цифры будут разные?

Подсчитаем количество номеров, в которых все цифры разные: $m_{\text{Ц}} = 10\cdot 9\cdot 8 \times 12^3$ = 1 244 160. Теперь то же самое сделаем для букв: $m_{\text{Б}} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 10^3$ = 1 320 000. А теперь воспользуемся (ошибочно!) правилом сложения:

$$m=m_{\text{Ц}}+m_{\text{Б}}=1\ 244\ 160+1\ 320\ 000=2\ 564\ 160\,.$$

Ошибка здесь в том, что номера, в которых и буквы, и цифры разные, *учтены два раза*, поэтому правильный подсчёт такой: найдём количество номеров, в которых все буквы и цифры разные (мы это уже делали в примере 1): $m_{\text{БЦ}}=12\cdot10\cdot9\cdot8\cdot11\cdot10$, и вычтем это количество из полученной суммы:

$$m=m_{\text{Ц}}+m_{\text{Б}}-m_{\text{БЦ}}=1\ 244\ 160+1\ 320\ 000-950\ 400=1\ 613\ 760.$$

Вот теперь можем найти вероятность:

$$P(A)=\frac{1\ 613\ 760}{12\cdot10\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12}=\frac{1681}{1800}\approx0{,}934.$$

Есть ещё одна интересная комбинаторная стратегия — *правило вычитания*. Его можно сформулировать так: если сложно посчитать благоприятные комбинации, попробуйте посчитать неблагоприятные, а потом вычесть это количество из всех возможных.

Пример 4. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля есть хотя бы две совпадающие буквы или цифры?

Эту задачу можно решить по правилу сложения, но это будет очень долго, так как понадобится разбить все благоприятные комбинации на очень большое количество непересекающиеся классов (в зависимости от того, в каких именно позициях буквы или цифры совпадают, а в каких различны). Гораздо проще воспользоваться правилом вычитания. В самом деле, опишем комбинации, неблагоприятные для нашей задачи: это номера, в которых все буквы разные и все цифры разные. Но ведь это же комбинации из примера 1, количество которых мы легко нашли по правилу умножения: $\overline{m}=12\cdot10\cdot9\cdot8\cdot11\cdot10=950\ 400$ (мы обозначили это количество через $\overline{m}$, так как теперь это неблагоприятные комбинации). Отсюда находим количество благоприятных комбинаций:

$$m = n - \overline{m} = 1\ 728\ 000 - 950\ 400 = 777\ 600$$

и получаем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{777\ 600}{1\ 728\ 000} = \frac{9}{20} = 0,45.$$

Отметим интересную вещь: правилам умножения, сложения и вычитания соответствуют уже известные вам формулы вычисления вероятностей: формула сложения, формула умножения и формула вероятности противоположного события. Так что во всех приведённых примерах можно было вместо комбинаторных правил использовать эти формулы.

Все, кто хоть немного знаком с комбинаторикой, знают, что, кроме правил, в комбинаторике есть готовые формулы для подсчёта различных типов комбинаций: *перестановок*, *размещений*, *сочетаний* и других, более сложных. Напомним три основные формулы:

Тип комбинаций	**Формула для подсчёта**
Перестановки из N объектов	$P_N = N!$
Размещения из N объектов по k	$A_N^k = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$
Сочетания из N объектов по k	$C_N^k = \frac{N!}{(N-k)!k!}$

Первые две формулы — это простое применение правила умножения к соответствующему типу комбинаций, поэтому для решения вероятностных задач нет особой необходимости в их специальном рассмотрении (достаточно уметь применять правило умножения). А вот на сочетаниях мы остановимся подробнее.

Пусть имеется множество из N различных объектов (чисел, букв, шаров, лотерейных билетов, людей и т. д.). Из него нам нужно одновременно выбрать какие-нибудь k объектов (например, два шара из четырёх). Будем называть каждый такой выбор *сочетанием из N по k*. Спрашивается, сколько всего таких сочетаний существует. Понятно, что ответ не зависит от того, какие объекты мы рассматриваем, а определяется только числами N и k.

Чтобы ответить на этот вопрос, изменим условие задачи: будем выбирать объекты не одновременно, а последовательно друг за другом. Тогда для выбора первого объекта существует N вариантов выбора, для второго — $(N - 1)$ вариант (один объект уже выбран), для третьего — $(N - 2)$ варианта, …, для последнего k-го объекта — $(N - k + 1)$ вариантов выбора (к этому времени $(k - 1)$ объект уже выбран). Значит, по правилу умножения, всего таких вариантов последовательного выбора k объектов из N будет $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)$ (заметим, что мы только что доказали формулу для числа размещений A_N^k). Это длинное произведение можно записать в более компактной форме: $\frac{N!}{(N-k)!}$.

Вернёмся к сочетаниям. Рассматривая вместо одновременного выбора последовательный, мы посчитали каждое сочетание не один, а k! раз. В самом деле, ведь все комбинации, которые отличаются только порядком выбранных предметов, но не их составом, дают одно и то же сочетание. Посчитаем, сколькими способами можно упорядочить k предметов: на первое место можно поставить любой из k предметов, на второе — любой из (k – 1) оставшихся и т. д. — получаем $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1=k!$ (это мы доказали формулу для числа перестановок). Воспользуемся последним комбинаторным правилом, которое мы ещё не упоминали, — *правилом деления*: если при подсчёте каких-либо комбинаций мы учли каждую из них r раз (здесь важно, что r одно и то же для всех комбинаций), то для получения правильного ответа нужно поделить полученное количество на r. В нашем случае в качестве k выступает k!:

$$C_N^k=\frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

Формула для числа сочетаний доказана.

Важный частный случай сочетаний получаем при k = 2 — это *пары объектов*. Полезно запомнить, во что превращается при этом общая формула:

$$C_N^2=\frac{N\cdot(N-1)}{2}$$ — формула для числа пар.

Отметим также, что $C_N^0=1$, $C_N^1=N$. Эти равенства следуют как из общей формулы, так и из самого определения числа сочетаний (ничего не выбрать можно только одним способом, а выбрать один элемент — N способами).

Рассмотрим примеры вероятностных задач с использованием сочетаний.

Пример 5. Из Олиного класса, в котором учится 20 человек, случайным образом выбирают двух дежурных. С какой вероятностью дежурить будут Оля и её подруга Ира?

Равновозможными исходами нашего опыта являются всевозможные сочетания из 20 человек по 2 (т. е. пары дежурных). Всего таких сочетаний будет $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. Из них благоприятным для нашего события будет только одно, когда в эту пару попадают Оля и Ира. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{190}\approx 0,0053$.

Пример 6. В той же ситуации нужно ответить на другой вопрос: с какой вероятностью дежурить будет Оля?

Поскольку опыт не изменился, то общее число исходов осталось то же — 190. А вот благоприятными теперь будут те пары, в которые входит Оля. Таких пар 19. (Олю можно поставить в пару с любым из 19 учеников.) Искомая вероятность равна $\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$.

Получив такой замечательный ответ, полезно задуматься: а нельзя ли решить эту задачу как-нибудь проще, без использования сочетаний? Выберем пару дежурных следующим образом: положим в шапку 20 бумажек, 2 из них пометим крестиками. Ребята будут по очереди подходить к шапке и вытягивать по бумажке. Те, кто вытянул крестики, будут дежурить. Справедливый жребий? Очевидно, да. Остаётся договориться, кто пойдёт тянуть первым. Пусть это будет Оля. В момент, когда она подошла к шапке, там 20 бумажек, из которых 2 — с крестиками. Очевидно, вероятность вытащить бумажку с крестиком равна $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

Пример 7. Из ящика, в котором лежат 2 красных, 2 жёлтых и 2 зелёных шара, вытаскивают наугад два шара. С какой вероятностью они будут одного цвета?

В этой задаче часто можно услышать мгновенные ответы типа $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, ни один из которых, к счастью, не является верным (дело в том, что при правильном ответе очень трудно убедить ученика в неправильных рассуждениях). Как и в двух предыдущих примерах, равновозможными исходами опыта являются сочетания из 6 по 2, их количество равно $\frac{5\cdot 6}{2}=15$. Благоприятными будут 3 исхода, поэтому вероятность равна $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

Упражнения

9. Найдите вероятность того, что в случайном номере автомобиля будут только гласные буквы.

Р е ш е н и е. Очевидно, что про цифры можно забыть и рассматривать номера, состоящие только из трёх букв. Перечислим все гласные буквы, которые можно использовать в номере: А, Е, О, У. Тогда общее количество исходов по правилу умножения будет $n = 12^3$, количество благоприятных — $m = 4^3$, вероятность

$$P(A)=\frac{4^3}{12^3}=\frac{1}{27}.$$

10. Каждый из четверых друзей случайным образом садится в один из 10 вагонов электрички. С какой вероятностью все они окажутся в разных вагонах?

Р е ш е н и е. Каждый из четверых друзей может выбрать любой из 10 вагонов электрички, поэтому общее число возможных исходов по правилу умножения будет $n = 10^4$. При благоприятном исходе первый из друзей может выбрать вагон 10 способами, второй — 9 способами, третий — 8 и четвёртый — 7 способами. Отсюда $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, а вероятность

$$P(A)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^4}=\frac{63}{125}=0{,}504.$$

11. Шесть школьников случайным образом рассаживаются на скамейку. С какой вероятностью два друга Саша и Коля будут сидеть рядом?

Р е ш е н и е. Посчитаем общее количество исходов опыта по правилу умножения: $n = 6!$ Благоприятные исходы разобьём на 5 непересекающихся классов, в зависимости от занимаемых нашими друзьями мест: 1 и 2, 2 и 3, …, 5 и 6. В каждом из этих классов посчитаем количество исходов по правилу умножения: $2 \cdot 4!$ Отсюда $m = 5 \cdot 2 \cdot 4!$, и вероятность $P(A) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3}$.

12. Те же шесть школьников случайным образом рассаживаются за круглый стол. С какой вероятностью два друга Саша и Коля будут сидеть рядом?

Р е ш е н и е. Изменится только количество классов, на которые мы разбиваем благоприятные исходы: добавится класс, в котором друзья занимают места 6 и 1. Отсюда $m = 6 \cdot 2 \cdot 4!$, и вероятность

$$P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5}.$$

13. В ящике лежит 20 яблок, из которых 5 неспелых. Маша покупает 6 яблок. С какой вероятностью половина из них будут неспелыми?

Р е ш е н и е. Половина в данном случае означает 3 яблока. Поскольку речь идёт о случайном выборе шести яблок из двадцати, то исходами опыта будут сочетания из 20 по 6, поэтому $n = C_{20}^6$. Чтобы сочетание было благоприятным, нужно выбрать 3 неспелых яблока из 5, а затем 3 спелых из 15. Первое действие можно сделать C_5^3 способами, второе — C_{15}^3 способами, значит, по правилу умножения $m = C_5^3 \cdot C_{15}^3$. Отсюда вероятность

$$P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_{15}^3}{C_{20}^6} = \frac{455}{3876} \approx 0{,}117.$$

14. С какой вероятностью в предыдущей задаче Маше не попадётся ни одного неспелого яблока?

Р е ш е н и е. *Способ 1.* Общее число исходов не изменяется. Для благоприятного исхода теперь нужно выбрать все 6 яблок из 15 спелых, поэтому $m = C_{15}^6$. Отсюда вероятность

$$P(A) = \frac{C_{15}^6}{C_{20}^6} = \frac{1001}{7752} \approx 0{,}129.$$

Способ 2. Решим задачу по формуле умножения для зависимых событий:

$$P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{11}{16} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1001}{7752} \approx 0{,}129.$$

3. Случайные величины

Случайным называется любое событие, связанное со случайным экспериментом. До проведения эксперимента мы не можем точно сказать, произойдёт оно или не произойдёт. Аналогично *случайной величиной* называется любая числовая величина, связанная со случайным экспериментом. До проведения эксперимента нельзя однозначно предсказать, какое она примет значение, но можно попытаться найти все её возможные значения и их вероятности. Такая информация позволит с некоторой долей уверенности предсказывать поведение случайной величины в будущем и использовать это для решения практических задач.

Пример 1. Рассмотрим эксперимент с подбрасыванием двух кубиков. Он имеет 36 равновозможных исходов, каждый из которых можно закодировать парой чисел, выпавших на первом и втором кубиках. Введём следующие величины:

X — число очков на первом кубике;

Y — число очков на втором кубике;

S — сумма очков на двух кубиках;

M — максимальное из двух чисел на кубиках;

m — минимальное из двух чисел на кубиках.

Значение любой из этих четырёх величин связано с указанным экспериментом. Пусть, например, эксперимент завершился исходом (3; 2). Тогда перечисленные величины приняли следующие значения: $X = 3$; $Y = 2$; $S = 5$; $M = 3$; $m = 2$. При другом исходе эксперимента эти значения будут другими. Для каждого из 36 возможных исходов эксперимента можно точно указать значение каждой из перечисленных выше величин. В нашем опыте это удобно сделать с помощью таблиц. Вот так, например, будет выглядеть таблица значений случайной величины S, равной сумме значений на двух кубиках (табл. 1).

Таблица 1

2-й кубик / 1-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Аналогичные таблицы можно составить и для остальных величин, приведённых в примере (см. задачу 1). Таким образом, *случайная величина представляет собой функцию, определённую на множестве всех возможных исходов опыта*: областью определения этой функции является множество всех возможных исходов, а её значениями — числа (целые или действительные). Для каждого исхода случайная величина имеет вполне определённое (неслучайное) значение. Но поскольку исход опыта заранее неизвестен, то и значение, которое примет эта величина в любом опыте, заранее неизвестно, случайно.

Чтобы полностью задать случайную величину, нужно указать, какое значение она принимает на каждом из элементарных исходов опыта. Но это не всегда удобно: исходов, как мы видели, может быть много (или даже бесконечно много), и задать значение случайной величины на каждом из них с помощью таблицы или каким-то другим простым методом будет уже невозможно. К счастью, во многих ситуациях столь подробного описания случайной величины не требуется — достаточно знать, какие значения она может принимать и каковы их вероятности. Эта информация называется *законом распределения вероятностей* или просто *распределением вероятностей случайной величины*. Если количество возможных значений случайной величины конечно, то закон распределения удобнее всего задавать таблицей (табл. 2), в первой строке которой по возрастанию перечисляются все возможные значения величины X, а во второй — их вероятности.

Таблица 2

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Не путайте таблицу 2 с таблицей 1: таблица 1 использовалась для задания самой случайной величины как функции на множестве исходов; таблица 2 — для её закона распределения. Поскольку в законе распределения учитываются все возможные значения данной величины, то сумма соответствующих им вероятностей должна быть равна 1:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Посмотрим, как будут выглядеть законы распределения для некоторых величин из примера 1.

Пример 2. Закон распределения случайной величины X (табл. 3).

Таблица 3

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Как видим, все значения, которые может принимать величина X, равновозможны. Закон распределения случайной величины Y, очевидно, будет точно таким же. На этом примере мы видим, что у разных случайных величин законы распределения могут совпадать.

Закон распределения случайной величины S показан в таблице 4.

Таблица 4

Значение	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Здесь значения S имеют разную вероятность. Такой закон уже интересно изобразить с помощью графика (рис. 2).

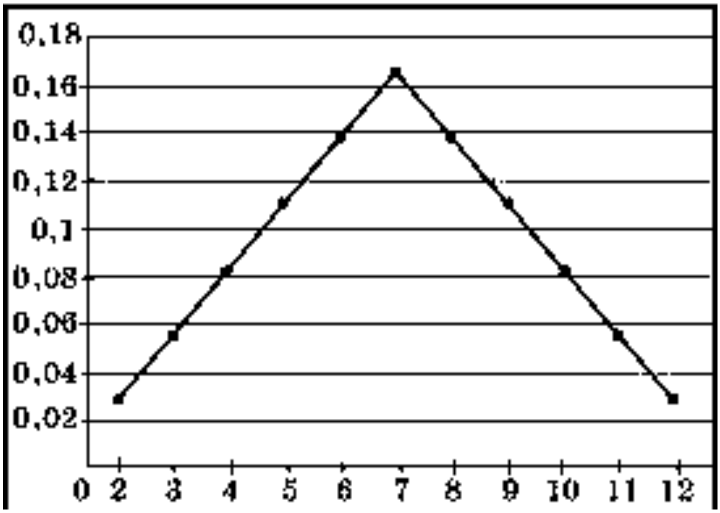

Рис. 2

По горизонтальной оси отложены возможные значения случайной величины S, по вертикальной оси — их вероятности. Поскольку возможных значений всего 11, график представляет собой множество из 11 точек, которые для наглядности соединены отрезками. Такой график называют *полигоном распределения*.

Итак, мы выяснили, что, для того чтобы охарактеризовать поведение случайной величины, не обязательно знать её значение для каждого из возможных исходов опыта, — можно вполне обойтись информацией, которую мы назвали законом распределения. Можно пойти ещё дальше и сократить количество информации до минимума, заменив закон распределения всего одним или несколькими числами. Конечно, много полезных деталей будет при этом потеряно. Но если числовые характеристики выбраны удачно, то они могут стать квинтэссенцией, содержащей наиболее важную информацию о поведении случайной величины.

Обратившись к повседневному опыту, нетрудно догадаться, что наиболее важной числовой характеристикой случайной величины является её среднее значение, или, как говорят в теории вероятностей, *математическое ожидание* случайной величины. Посмотрим, как же оно определяется. Пусть величина X имеет закон распределения, заданный таблицей 2. Что можно считать её средним значением? Казалось бы, наиболее естественный способ — взять среднее арифметическое всех значений x_i. Но тогда не будут учтены их вероятности, а ведь какие-то из x_i более вероятны и, значит, должны внести больший вес в формирование среднего значения. В теории вероятностей *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины X называют число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n .$$

Как видите, каждое из возможных значений входит в это выражение со своим весом, равным соответствующей вероятности. Обозначение $E(X)$ происходит от английского слова *expectation* — ожидание.

Пример 3. Вернёмся к примеру с двумя кубиками. Поскольку X и Y имеют одинаковый закон распределения, то их математические ожидания совпадают:

$$E(X) = E(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5\,.$$

Получается, что в среднем на каждом из кубиков выпадает по три с половиной очка? Как ни странно, это именно так. Среднее значение может не совпадать ни с одним из возможных значений случайной величины. О том, как можно интерпретировать значение 3,5 на практике, мы поговорим в заключительном разделе этого приложения, где речь пойдёт о законе больших чисел. А теперь найдём математическое ожидание суммы очков на двух кубиках:

$$E(S) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} +$$
$$+11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Полученный результат можно было угадать, глядя на график закона распределения случайной величины S: он симметричен относительно значения 7. Справедливо следующее общее утверждение: если закон распределения случайной величины симметричен относительно некоторого числа a, то это число и будет математическим ожиданием этой величины. В заключение отметим некоторые свойства математического ожидания, которые можно вывести из его определения:

1. Математическое ожидание константы k равно ей самой: $E(k) = k$.
2. Если k — произвольное число, то $E(k\cdot X) = k\cdot E(X)$.
3. Для любых случайных величин X и Y выполняется равенство
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)\,.$$

Кроме этого, имеет место ещё одно замечательное свойство, которое выполняется уже не для всех случайных величин:

4. Для *независимых* случайных величин X и Y выполняется равенство
$$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)\,.$$

Независимость величин имеет тот же смысл, что и независимость случайных событий, но останавливаться на этом понятии более подробно мы не будем. Приведённые свойства математического ожидания могут значительно облегчить его подсчёт. Вернёмся к примеру 1. Математическое ожидание случайной величины S можно найти, не обращаясь к её закону распределения, используя вместо этого свойство 4:

$$E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7\,.$$

Как видите, этот способ намного короче, чем вычисление $E(S)$ по определению.

Итак, мы рассмотрели число, которое характеризует поведение случайной величины в среднем. Но среднее значение далеко не всегда даёт даже общее представление о поведении случайной величины. Есть ещё одна характеристика, которая зачастую несёт не менее важную информацию, — это *разброс* (или *рассеивание*) случайной величины вокруг её среднего значения. Очевидно, проще всего взять в качестве числовой меры такого разброса среднее отклонение от среднего, $E(X-E(X))$.

Но в силу свойств математического ожидания эта величина всегда равна нулю:

$$E(X-E(X))=E(X)-E(E(X))=E(X)-E(X)=0.$$

Этот факт имеет простое объяснение: случайная величина $X-E(X)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, которые компенсируют друг друга и дают в среднем 0. Для получения объективной характеристики разброса необходимо брать все эти отклонения с одним и тем же знаком. Здесь возможны разные варианты — например, взять в качестве меры разброса математическое ожидание модуля отклонения $|X-E(X)|$ или квадрата отклонения $(X-E(X))^2$. В теории вероятностей предпочли остановиться на втором варианте и считать основной мерой рассеивания случайной величины *дисперсию*, равную

$$D(X)=E(X-E(X))^2.$$

Вычислим дисперсию для случайной величины X, имеющей закон распределения, заданный таблицей 1. Обозначим для простоты математическое ожидание случайной величины X через $a=E(X)$. Тогда в соответствии с определением дисперсии получаем

$$D(X)=(x_1-a)^2\cdot p_1+(x_2-a)^2\cdot p_2+(x_3-a)^2\cdot p_3+...+(x_n-a)^2\cdot p_n.$$

Дисперсия хорошо характеризует разброс случайной величины, но имеет один существенный недостаток: она измеряется в «квадратных» по отношению к самой случайной величине X единицах. Например, если X измеряется в метрах, то $D(X)$ — в квадратных метрах; если X измеряется в рублях, то $D(X)$ — в «квадратных рублях» и т. д. Чтобы избежать такого несоответствия, часто используют другую меру рассеивания, равную квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Эта величина называется *средним квадратичным* или *стандартным отклонением* случайной величины X. Стандартное отклонение, как и математическое ожидание, измеряется в тех же единицах, что и исходная величина X.

Как и математическое ожидание, дисперсия обладает рядом свойств, которые могут облегчить её вычисление:

1. Дисперсия константы равна нулю: $D(k)=0$.
2. Если k — произвольное число, то $D(k\cdot X)=k^2\cdot D(X)$.
3. $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

А вот дисперсия суммы будет равна сумме дисперсий уже не для всех, а лишь для независимых случайных величин:

4. Для *независимых* случайных величин X и Y выполняется равенство

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Вернёмся к примеру 1 и вычислим дисперсию приведённых там случайных величин.

Пример 4. Вычислим дисперсию случайной величины X двумя способами: по определению и с использованием свойства 3. В обоих случаях нам понадобится уже вычисленное ранее математическое ожидание этой величины $E(X)=3,5$.

Способ 1 (по определению дисперсии):

$$D(X)=(1-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}+(4-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}+(5-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-3,5)^2\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=6,25\cdot\frac{1}{6}+2,25\cdot\frac{1}{6}+0,25\cdot\frac{1}{6}+0,25\cdot\frac{1}{6}+2,25\cdot\frac{1}{6}+6,25\cdot\frac{1}{6}=17,5\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12}.$$

Способ 2 (по свойству 3):

$$D(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-3,5^2=91\cdot\frac{1}{6}-3,5^2=\frac{35}{12}.$$

Как и математическое ожидание, дисперсия полностью определяется законом распределения случайной величины, поэтому $D(Y)=D(X)=\frac{35}{12}$.

Для подсчёта дисперсии случайной величины S можно воспользоваться одним из свойств дисперсии: нужно вспомнить, что $S=X+Y$, причём величины X и Y очевидным образом независимы. Отсюда

$$D(S)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}.$$

Упражнения

15. Постройте таблицы значений случайных величин m и M из примера 1.

Р е ш е н и е.

Таблица значений *m*

1-й кубик \ 2-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Таблица значений *M*

1-й кубик \ 2-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

16. Найдите законы распределения вероятностей для случайных величин m и M из примера 1 и постройте для них полигоны распределения.

Р е ш е н и е.

Закон распределения *m*

m	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Закон распределения *M*

M	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

17. Найдите математическое ожидание случайных величин m и M из примера 1.

Р е ш е н и е.

$E(m) = 1\cdot\frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + ... + 6\cdot\frac{1}{36} = \frac{91}{36}$;

$E(M) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + ... + 6\cdot\frac{11}{36} = \frac{161}{36}$.

П р о в е р к а: поскольку $m + M = X + Y = S$, то должно выполняться равенство $E(m) + E(M) = E(S) = 7$. Проверяем: $\frac{91}{36} + \frac{161}{36} = \frac{252}{36} = 7$ — выполнено.

18. Стрелок, который попадает в мишень с вероятностью p, сделал 2 выстрела по мишени. Случайная величина S — общее количество попаданий. Найдите математическое ожидание и дисперсию S.

Р е ш е н и е. Найдём закон распределения S:

S	0	1	2
p	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$$E(S) = 0\cdot(1-p)^2 + 1\cdot 2p(1-p) + 2\cdot p^2 = 2p;$$
$$E(S^2) = 0^2\cdot(1-p)^2 + 1^2\cdot 2p(1-p) + 2^2\cdot p^2 = 2p + 2p^2;$$
$$D(S) = E(S^2) - E^2(S) = 2p + 2p^2 - (2p)^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p).$$

4. Испытания Бернулли

Все новые понятия и формулы, которые мы рассмотрели в разделах 1—3, находят своё применение в одной из самых замечательных вероятностных моделей — так называемой *схеме Бернулли*[1].

Представим себе, что мы проводим случайный опыт, в котором нас интересует наступление некоторого случайного события A. Будем считать наступление этого события *успехом*, а противоположный результат $\overline{A}$ — *неудачей*. Вероятность успеха обозначим p, вероятность неудачи — q:

$$p = P(A), \qquad q = P(\overline{A}), \qquad p + q = 1.$$

Если провести N таких независимых опытов, то полученная модель будет называться схемой Бернулли, а сама последовательность — *испытаниями Бернулли*. Мы уже не раз пользовались этой схемой, когда решали задачи, в которых многократно подбрасывались монеты, игральные кубики, производились выстрелы в мишень и т.

[1] Поскольку Бернулли — это целая математическая династия, то следует объяснить, что здесь речь идёт о Якобе Бернулли (1654—1705) — швейцарском математике, который, помимо теории вероятностей, внёс большой вклад в аналитическую геометрию, вариационное исчисление, теорию чисел и другие разделы математики.

д. Чтобы любой из перечисленных примеров превратился в схему Бернулли, нужно было лишь договориться о том, что в каждом из этих опытов считать успехом.

Пример 1. *Подбрасывание монеты.* Успех — выпадание орла. Серия из N таких испытаний представляет собой *симметричные* испытания Бернулли, в которой вероятности успеха и неудачи равны: $p = q = \frac{1}{2}$.

Пример 2. *Тестирование.* Ученик отвечает на вопрос, к которому даётся 4 варианта ответа, из которых ровно один верный. Предположим, что ученик не знает предмета и выбирает правильный ответ наугад. Будем считать успехом событие A — «выбран правильный ответ». Его вероятность $P(A) = \frac{1}{4}$. Экзамен, в котором ученик отвечает на N таких вопросов, можно считать схемой Бернулли, в которой $p = \frac{1}{4},\ q = \frac{3}{4}$.

Пример 3. *Выбор с возвращением.* В ящике находится L деталей, из которых l деталей не удовлетворяют стандарту качества. Из ящика достают деталь, проверяют и кладут обратно. Успехом будем считать событие A — деталь бракованная. Вероятность успеха $P(A) = \frac{l}{L}$. Серия из N таких испытаний будет схемой Бернулли с $p = \frac{l}{L},\ q = 1 - \frac{l}{L}$.

Пример 4. *Выбор без возвращения.* Проводится тот же опыт, но проверенная деталь обратно в ящик не возвращается. Будет ли это схемой Бернулли? Очевидно, нет. Результаты опытов становятся зависимыми: если в первом опыте вынутая деталь оказалась бракованной, то шансы на успех во втором опыте уменьшаются. Соответствующая условная вероятность будет равна $\frac{l-1}{L-1}$. Её отличие от безусловной $\frac{l}{L}$ будет незначительным только в том случае, если числа l и L достаточно велики (мы уже обсуждали этот вопрос в п. 1).

Последний пример показывает, что не любая последовательность испытаний с двумя исходами может рассматриваться как схема Бернулли.

Одной из первых задач, которые возникают при рассмотрении схемы Бернулли, является *задача о вероятности получить заданное число успехов*. Приведём примеры таких задач для испытаний, описанных в примерах 1—3:

- Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью выпадет ровно 5 орлов?
- Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит на 15 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?
- В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5 деталей. С какой вероятностью все выбранные детали будут без брака?

В общем виде задача формулируется так: проводится серия из N испытаний Бернулли с вероятностью успеха p; с какой вероятностью ровно k из этих испытаний закончатся успехом? Обозначим интересующую нас вероятность $P_N(k)$ и докажем следующую *формулу Бернулли*:

$$P_n(k) = C_N^k p^k q^{N-k}.$$

Напомним, что через C_N^k в комбинаторике обозначается число сочетаний, т. е. число способов, которым можно выбрать любые k предметов из N имеющихся. Это число находится по формуле $C_N^k = \dfrac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$ (см. п. 2).

Перейдём к доказательству формулы Бернулли. Рассмотрим всю серию из N испытаний как один случайный опыт. Какие у него элементарные исходы и сколько их? Каждый исход такого «длинного» опыта закодируем последовательностью из букв У и Н, которые могут чередоваться в произвольном порядке. Вот так, например, будут выглядеть все возможные исходы серии из трёх испытаний:

УУУ, УУН, УНУ, УНН, НУУ, НУН, ННУ, ННН.

Как видим, таких исходов в этом случае 8. Нетрудно сообразить, что в общем случае для N испытаний возможных исходов будет 2^N — это непосредственно следует из правила умножения (подобные задачи мы решали в п. 2). Будут ли все такие исходы равновероятны? Разумеется, нет! Однако вероятность каждого исхода можно легко вычислить, пользуясь *формулой произведения вероятностей* для независимых событий. В самом деле, поскольку все отдельные опыты в любой серии независимы, то вероятность любой последовательности из k успехов и $(N - k)$ неудач может быть найдена по формуле $p^k q^{N-k}$. Так, для приведённых выше восьми исходов их вероятностями будут: $p^3, p^2q, p^2q, pq^2, p^2q, pq^2, pq^2, q^3$.

Для доказательства формулы Бернулли остаётся сделать последний шаг — посчитать, сколько всего серий, в которых содержится ровно k успехов. Другими словами, сколько последовательностей длины N можно составить из букв У и Н так, чтобы в них было ровно k букв У? У нас имеется N пустых мест, на которые нужно расставить k букв У и $(N - k)$ букв Н. Сколькими способами это можно сделать? Каждый способ состоит в выборе тех k из N мест, на которых будут стоять буквы У. Это можно сделать C_N^k способами. Значит, всего таких серий будет C_N^k, а поскольку вероятность каждой из них равна $p^k q^{N-k}$, то

$$P_N(k) = p^k \cdot q^{N-k} + p^k \cdot q^{N-k} + \ldots + p^k \cdot q^{N-k} = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

Формула Бернулли в самом общем случае доказана. Вернёмся теперь к нашим примерам 1—3 и вычислим вероятности описанных там событий.

Пример 1а. Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью выпадет ровно 5 орлов?

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{63}{256} \approx 0,246\,.$$

Пример 2а. Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит на 15 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?

$$P_{10}(5)=C_{20}^{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=\frac{235\ 467}{68\ 719\ 476\ 736}\approx 0{,}00000343\,.$$

Пример 3а. В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5 деталей. С какой вероятностью все выбранные детали будут без брака?

$$P_{100}(5)=C_{100}^{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{95}\approx 0{,}0339\,.$$

На практике представляют интерес вероятности более сложных событий, связанных с испытаниями Бернулли.

Пример 1б. Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью орлов выпадет больше половины?

Пример 2б. Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит хотя бы на 5 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?

Пример 3б. В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5 деталей. С какой вероятностью хотя бы одна выбранная деталь будет бракованной?

Необходимо вычислить $P_5(1;5)=P_5(1)+\ldots+P_5(5)$.

Перейдём к противоположному событию:

$$P_5(1;5)=1-P_5(0)=1-C_5^0\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=\frac{781}{1024}\approx 0{,}763.$$

Во всех приведённых примерах речь идёт о событиях типа «число успехов в N испытаниях будет лежать в пределах от k_1 до k_2». Для такой вероятности будем использовать обозначение $P_N(k_1;\,k_2)$. Ясно, что любую такую вероятность можно найти, просто сложив все вероятности $P_N(k)$, где k пробегает все значения из диапазона от k_1 до k_2. Однако этих вероятностей может оказаться слишком много, поэтому в каждой конкретной задаче стоит поискать более рациональные пути вычисления вероятностей.

Вероятности из примеров 1б и 2б вычисляются в задачах **23** и **24**.

Рассмотрим теперь случайную величину S_N, равную числу успехов в N испытаниях Бернулли. Очевидно, что она может принимать любые значения от 0 до N, причём вероятность каждого значения задаётся формулой Бернулли:

$$P\{S_N=k\}=P_N(k)=C_N^k p^k q^{N-k}\,.$$

В следующем разделе для вывода закона больших чисел нам понадобится знать, чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины S_N. Попробуем использовать для их вычисления свойства математического ожидания и дисперсии, о которых говорилось в п. 3. Рассмотрим случайные величины X_1, …, X_N, каждая из которых определяется так:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-е испытание завершилось неудачей;} \\ 1, & \text{если } i\text{-е испытание завершилось успехом.} \end{cases}$$

Все эти величины имеют одинаковый закон распределения:

X_i	0	1
P	q	p

Непосредственно из этого закона получаем:

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p;$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = p - p^2 = p \cdot (1-p) = pq.$$

Величины X_1, …, X_N независимы, а их сумма равна общему числу успехов в N испытаниях, т. е. интересующей нас случайной величине S_N. Отсюда находим математическое ожидание и дисперсию S_N:

$$E(S_N) = E(X_1 + ... + X_N) = E(X_1) + ... + E(X_N) = Np;$$

$$D(S_N) = D(X_1 + ... + X_N) = D(X_1) + ... + D(X_N) = Npq.$$

Упражнения

19. Монету бросают 4 раза. С какой вероятностью выпадет ровно 2 орла?

Р е ш е н и е. Это испытания Бернулли, где $p = 0{,}5$ и $N = 4$, поэтому

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

20. Чему равна вероятность того, что при бросании шести кубиков выпадет хотя бы одна шестёрка?

Р е ш е н и е. Это испытания Бернулли, где $p = \frac{1}{6}$ и $N = 6$, поэтому

$$P_6(1;\ 6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665.$$

21. На каждом этаже в подъезде 5-этажного дома горят одинаковые лампочки. Вероятность того, что любая из них не сгорит в течение ближайшего месяца, равна 0,2. Чему равна вероятность того, что в течение месяца: а) сгорит ровно одна лампочка; б) сгорит хотя бы одна лампочка?

Р е ш е н и е. Если считать успехом перегорание лампочки, то это испытания Бернулли, где $p = 0{,}8$ и $N = 5$, поэтому

а) $P_5(1) = C_5^1 (0{,}8)^1 (0{,}2)^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 \approx 0{,}0064;$

б) $P_5(1;5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 (0{,}8)^0 (0{,}2)^5 = 1 - (0{,}2)^5 \approx 0{,}9997.$

22. Найдите вероятность события из примера 2б.

Р е ш е н и е. Необходимо вычислить

$$P_{20}(5;20) = P_{20}(5) + ... + P_{20}(20) = 1 - (P_{20}(0) + ... + P_{20}(4)).$$

Можно сократить вычисления, если перейти к противоположному событию:

$$P_{20}(5;20) = 1 - (P_{20}(0) + \ldots + P_{20}(4)) \approx 1 - 0,415 = 0,585.$$

23. Найдите вероятность события из примера 1б.

Р е ш е н и е. Необходимо вычислить $P_{10}(6;10) = P_{10}(6) + \ldots + P_{10}(10)$.

Чтобы не вычислять 5 вероятностей, составляющих эту сумму, заметим, что в силу симметрии опыта искомая вероятность совпадает с вероятностью события «решек выпадет больше половины», которая равна

$$P_{10}(0;\ 4) = P_{10}(0) + \ldots + P_{10}(4).$$

Остаётся вспомнить, что

$$P_{10}(0;\ 4) + P_{10}(5) + P_{10}(6;10) = 1.$$

Из всего сказанного получаем

$$P_{10}(6;\ 10) = \frac{1 - P_{10}(5)}{2} = \frac{1 - C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{2} = \frac{193}{512} \approx 0,377.$$

24. Ученик отвечает на 40 вопросов теста, выбирая каждый раз один из четырёх ответов наугад. На сколько вопросов в среднем он ответит правильно?

Р е ш е н и е. Это испытания Бернулли, где $p = \frac{1}{4}$ и $N = 40$. Нужно найти математическое ожидание числа успехов. Оно равно $Np = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10.$

5. Закон больших чисел

Закон больших чисел — это обобщённое название нескольких теорем, суть которых состоит в том, что:

- во-первых, *при неограниченном увеличении числа испытаний частота случайного события стремится к его вероятности;*
- во-вторых, *среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины (в статистике это называется выборочным средним) стремится к её математическому ожиданию.*

Конечно, чтобы эти утверждения стали настоящими теоремами, нужно потребовать, чтобы выполнялись некоторые условия, и придать строгий смысл понятию «стремится». В этом разделе мы постараемся сделать это на доступном для школьника уровне, а также показать различные проявления закона больших чисел в реальной жизни.

Начнём с первой теоремы, которая касается сходимости частоты к вероятности. Представим себе, что мы хотим оценить неизвестную нам вероятность p некоторого случайного события A по его частоте и проводим с этой целью серию повторных *независимых* испытаний, в каждом из которых наше событие может произойти или не произойти. Если считать наступление события A успехом, то мы получаем рассмотренную в предыдущем разделе схему Бернулли. Пусть S_N, как и раньше, обозначает общее число успехов (т. е. наступлений события A) в N испытаниях. Тогда частота f_N события A после проведения N испытаний будет выражаться дробью

$$f_N = \frac{S_N}{N}.$$

В п. 4 было показано, что для случайной величины S_N справедливы равенства $E(S_N) = Np$, $D(S_N) = Npq$.

Найдём отсюда математическое ожидание и дисперсию случайной величины f_N:

$$E(f_N) = E\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{1}{N}E(S_N) = \frac{Np}{N} = p,$$

$$D(f_N) = D\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}D(S_N) = \frac{Npq}{N} = \frac{pq}{N}.$$

Получаем, что математическое ожидание частоты f_N равно вероятности p, а дисперсия f_N (т. е. разброс частоты вокруг вероятности) с ростом N уменьшается и стремится к 0.

Теперь перейдём ко второму утверждению о связи между выборочным средним и математическим ожиданием. Рассмотрим серию *независимых* наблюдений над некоторой случайной величиной X с математическим ожиданием a и дисперсией d. Обозначим эти наблюдения X_1, X_2, …, X_N. Среднее арифметическое таких наблюдений в статистике называется выборочным средним и обозначается

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\overline{X}$:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N}(E(X_1) + ... + E(X_N)) = \frac{1}{N}(a + ... + a) = \frac{Na}{N} = a,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}(D(X_1) + ... + D(X_N)) = \frac{1}{N^2}(d + ... + d) = \frac{Nd}{N^2} = \frac{d}{N}$$

(при вычислении дисперсии мы пользовались независимостью X_1, X_2, …, X_N).

Получили такие же результаты, как и для частоты: математическое ожидание выборочного среднего равно a, а дисперсия с ростом N уменьшается и стремится к 0.

Таким образом, предположив независимость проводимых испытаний, мы получили, что разброс частоты вокруг вероятности, так же как разброс выборочного среднего около математического ожидания, с ростом числа испытаний уменьшается и приближается к 0. На практике это позволяет использовать приближённые равенства: $f_N \approx P(A)$, $\overline{X} \approx E(X)$, которые тем точнее, чем больше N. При этом возникает естественный вопрос: сколько испытаний нужно провести, чтобы обеспечить в этих равенствах заранее заданную точность? Например, сколько раз нужно бросить монету, чтобы полученная частота орлов отличалась от 0,5 не больше чем на 0,01? Простого ответа на этот вопрос, к сожалению, не существует. И связано это всё с той же случайностью, которая присутствует в любом таком опыте.

Представьте себе, что путём каких-то рассуждений мы дали на этот вопрос точный ответ: нужно провести, например, 10 000 опытов. После этого кто-то провёл такую серию опытов, и у него получилось 4800 орлов, т. е. отклонение частоты от вероятности составило 0,02. Может такое случиться? Да, и, зная формулу Бернулли, мы можем даже найти вероятность такого «чрезвычайного события» — она будет маленькой, но не нулевой. Значит, дать стопроцентную гарантию, что частота после стольких-то опытов будет отличаться от вероятности не больше чем на 0,01, невозможно. Равенства, написанные выше, кроме того что они приближённые, ещё и в определённом смысле «случайные»: указывая границы, в которых будет лежать частота после проведения 10 000 опытов, мы должны добавить «с такой-то вероятностью». Например, для опыта с монетой частота орлов после проведения 10 000 испытаний будет лежать в интервале от 0,49 до 0,51 (т. е. отклоняться от вероятности не больше чем на 0,01) с вероятностью 0,955[1].

Найти эту вероятность для заданных границ можно разными способами. Грубую (т. е. не очень точную) оценку даёт *неравенство Чебышёва*[2]:

для любого числа $r > 0$

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq r\right) \leq \frac{D(X)}{r^2}.$$

Словами его смысл можно передать так: вероятность, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания больше чем на r, не превышает $\frac{D(X)}{r^2}$. Можно записать его и в другой, противоположной форме:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < r\right) > 1 - \frac{D(X)}{r^2}.$$

Если вернуться к примеру с монетой, то после N опытов дисперсия частоты, как мы уже показали, будет равна $\frac{pq}{N} = \frac{1}{4N}$. Значит, вероятность, что частота орлов отклонится от 0,5 больше, чем на 0,01, не превышает по неравенству Чебышёва $\frac{1}{4N \cdot 0{,}01^2} = \frac{10\ 000}{4N}$. Получается, что после 10 000 опытов эта вероятность будет не больше 0,25. Как видите, оценка действительно слишком грубая — выше мы уже говорили, что на самом деле она меньше 0,05. Однако главное, что даёт неравенство Чебышёва: из него следует, что вероятность любого отклонения частоты случайного события от его вероятности (и выборочного среднего от математического ожидания) стремится к 0 с ростом числа испытаний — это и есть математическая формулировка закона больших чисел.

[1] Этот результат можно получить с помощью теоремы Муавра—Лапласа, которая выходит за рамки рассматриваемого материала.

[2] П. Л. Чебышёв (1821—1894) — великий русский математик, получивший фундаментальные результаты во многих областях математики и механики. Ему принадлежит один из вариантов закона больших чисел.

Из неравенства Чебышёва можно сделать ещё один полезный для практических целей вывод: отклонение частоты от вероятности убывает примерно как $\frac{1}{\sqrt{N}}$, где N — число проведённых испытаний. В самом деле, если зафиксировать вероятность, с которой мы «доверяем» неравенству $|X - E(X)| < r$, сделав её, скажем, 0,99 (для практических целей этого обычно вполне достаточно), и вспомнить, что дисперсия частоты равна $\frac{pq}{N}$, то получим $\frac{pq}{N \cdot r^2} = 0,01$, следовательно, $r = \frac{10\sqrt{pq}}{\sqrt{N}}$, т. е., чтобы повысить точность приближения r в 10 раз, нужно будет провести примерно в 100 раз больше испытаний. Это полезно помнить, когда перед вами стоит реальная задача оценить неизвестную вероятность по полученной частоте.

В заключение посмотрим, какие ещё проявления закона больших чисел можно наблюдать в повседневной жизни — ведь многократным подбрасыванием монеты мы занимаемся не так уж часто. Более реальный пример из похожей области — всевозможные лотереи, которые проводятся сейчас в большом количестве. Во многих из них (например, «Спортлото») условия игры хорошо известны, и после освоения начального курса теории вероятностей вам не составит особого труда рассчитать вероятность выигрыша в такой лотерее, а точнее — его математическое ожидание. Будьте уверены, что оно всегда меньше цены билета, и это вполне оправданно — иначе благодаря всё тому же закону больших чисел организаторы лотереи разорились бы уже через несколько тиражей (именно через несколько — ведь в каждом тираже участвует очень много билетов, поэтому закон больших чисел для организаторов начинает работать сразу!). Представьте, что вы покупаете билет лотереи, в которой математическое ожидание выигрыша — 100 р., а стоимость билета — 200 р. Сыграв в такую лотерею один раз, вы рискуете потерять всего 200 р., зато можете выиграть миллион (правда, с очень маленькой вероятностью). Именно по этой причине люди и покупают иногда лотерейные билеты, вполне разумно рассудив, что ничего страшного в потере 200 р. нет. Но если вы начинаете играть в такую лотерею регулярно (см. задачу 3), то ваши средние потери в соответствии с законом больших чисел будут неуклонно приближаться к 100 р. на каждый купленный билет, и шансы выйти из такого затруднительного положения с каждым тиражом будут только уменьшаться.

Существуют и более приятные проявления закона больших чисел. Одно из них — повышение точности измерений. Пословица «семь раз отмерь, один раз отрежь» появилась задолго до того, как Якоб Бернулли впервые сформулировал закон больших чисел. Давно известно, что для повышения точности измерения какой-либо величины лучше всего взять результаты нескольких измерений, а потом вычислить их среднее арифметическое (именно так вы действуете на лабораторных работах по физике). В самом деле, если обозначить эти результаты X_1, X_2, …, X_N, то при условии, что измерения независимы и не имеют систематической ошибки (т. е. их математическое ожидание равно неизвестной измеряемой величине a), в силу закона больших чисел мы получим приближённое равенство $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} \approx a$, которое будет тем точнее, чем больше сделано измерений.

Страхование — одна из тех отраслей экономики, где буквально всё основано на законе больших чисел. Именно благодаря проявлению этого закона страховая компания может, основываясь на уже имеющихся данных, рассчитать ожидаемый ущерб клиентов и размеры страховых выплат и быть уверенной, что в ближайшем будущем они не сильно изменятся (или, в более сложной ситуации, следя за определёнными тенденциями, предсказать их изменение).

В медицине первыми симптомами болезни может служить выход некоторых показателей за пределы нормы. Что при этом считать нормой и как отделить случайную изменчивость, свойственную всем живым организмам, от патологии? Здесь тоже поможет хорошее знание закона больших чисел и связанных с ним вероятностных методов. Сейчас на некоторых заключениях, выдаваемых медицинскими лабораториями, можно увидеть такие выводы: «с вероятностью … у пациента диагностировано …». Справедливости ради нужно отметить, что не всем таким заключениям следует доверять: бывает, что методы теории вероятностей применяются необдуманно и без достаточных на то оснований.

Подытоживая материал этого пункта, можно сказать, что закон больших чисел лежит в основе буквально всех приложений теории вероятностей и позволяет рассматривать вероятность как объективную характеристику случайных явлений, происходящих вокруг нас.

Упражнения

25. Математическое ожидание случайной величины X равно 5, дисперсия равна 1. В каких границах будут лежать значения X с вероятностью 0,99?

Р е ш е н и е. Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины X:

$$P\left(\left|X-5\right|<r\right)\geq 1-\frac{1}{r^2}.$$

Вероятность 0,99 будет достигнута при $1-\frac{1}{r^2}=0{,}99$, откуда r = 10, т. е. с вероятностью 0,99 значения X лежат в границах от –5 до 15.

26. В условиях предыдущей задачи провели 100 независимых наблюдений над случайной величиной X и вычислили их среднее арифметическое $\overline{X}$. В каких границах будет лежать значение $\overline{X}$ с вероятностью 0,99?

Р е ш е н и е. Вычислим математическое ожидание и дисперсию $\overline{X}$:

$$E\left(\overline{X}\right)=\frac{5\cdot 100}{100}=5, \qquad D\left(\overline{X}\right)=\frac{1\cdot 100}{100^2}=0{,}01.$$

Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины $\overline{X}$:

$$P\left(\left|\overline{X}-5\right|<r\right)\geq 1-\frac{0{,}01}{r^2}.$$

Вероятность 0,99 будет достигнута при $1-\frac{0,01}{r^2}=0,99$, откуда $r = 1$, т. е. с вероятностью 0,99 значение $\overline{X}$ после 100 наблюдений лежит в границах от 4 до 6.

27. Каждую неделю вы покупаете лотерейный билет стоимостью 200 р. с математическим ожиданием выигрыша 100 р. и дисперсией 10 (при этом в лотерее разыгрываются призы стоимостью в 1 миллион рублей — на них-то вы и рассчитываете!). В каких границах с вероятностью 0,99 будет лежать ваш суммарный проигрыш за 10 лет такой игры?

Р е ш е н и е. Считая, что в году 52 недели, получаем, что за 10 лет вы сыграете в лотерею 520 раз. Обозначим через $\overline{X}=\frac{X_1+...+X_{520}}{520}$ ваш средний выигрыш за 10 лет (не считая пока затрат на покупку билетов). Найдём математическое ожидание и дисперсию $\overline{X}$:

$$E\left(\overline{X}\right)=\frac{100\cdot 520}{520}=100,\quad D\left(\overline{X}\right)=\frac{10\cdot 520}{520^2}=\frac{1}{52}\approx 0,019.$$

Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины $\overline{X}$:

$$P\left(\left|\overline{X}-100\right|<r\right)\geq 1-\frac{0,019}{r^2}.$$

Отсюда $1-\frac{0,019}{h^2}=0,99$ и $r\approx 1,39$, т. е. с вероятностью 0,99 значения $\overline{X}$ лежат в границах от 98,61 до 101,39. Значит, суммарный выигрыш (умножаем обе границы на 520) — от 51 277 до 52 723. А теперь самое интересное — вычитаем из обеих границ затраченные на 520 билетов 104 000 р.: получаем промежуток от –52 278 до –51 278.

Таким образом, ваш ожидаемый проигрыш с вероятностью 0,99 (т. е. практически наверняка!) составит не менее 51 000 р.

28. Решая предыдущую задачу, вы могли задаться вопросом: а существует ли такая лотерея, в которой математическое ожидание выигрыша равно 100, дисперсия 10 и при этом есть призы стоимостью 1 000 000 р.? Придумайте такую случайную величину, для которой всё перечисленное выполнено.

Р е ш е н и е. Попробуем подобрать как можно более простое решение задачи. Один выигрыш — в 1 000 000 р. — у нас должен быть обязательно. Очевидно, как в любой лотерее, будут билеты без выигрыша. Добавим ещё значение 100 и рассмотрим случайную величину с таким распределением:

X	0	100	1 000 000
P	$1-p-q$	q	p

Вероятности p и q попробуем подобрать так, чтобы $E(X)=100$, $D(X)=10$. Найдём математическое ожидание *X*: $E(X)=10^2 q+10^6 p$. Чтобы оно равнялось 100, должно выполняться соотношение $q+10^4 p=1$, т. е. $q=1-10^4 p$:

X	0	100	1 000 000
P	10^4p-p	$1-10^4p$	p

Найдём математическое ожидание

$$X^2:\ E(X^2)=10^4(1-10^4 p)+10^{12} p\,.$$

По условию задачи оно должно равняться

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=10+10\ 000=10\ 010\,.$$

Получаем уравнение $10^4(1-10^4 p)+10^{12} p=10\ 010$, из которого находим:

$$p=\frac{10}{10^{12}-10^8}\approx 10^{-11}\,.$$

Содержание

Учебное издание

Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна

Алгебра

Методические рекомендации
9 класс
Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художник *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Корректор *О. Н. Леонова, И. Н. Панкова*

АЛГЕБРА

Примерная рабочая программа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа основного общего образования по алгебре составлена на основе Фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения основной общеобразовательной программы основного общего образования, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования. В ней также учитываются основные идеи и положения Программы развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования.

Сознательное овладение учащимися системой алгебраических знаний и умений необходимо в повседневной жизни для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Практическая значимость школьного курса алгебры обусловлена тем, что её объектом являются количественные отношения действительного мира. Математическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Алгебра является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении алгебре способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки алгебраического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении алгебраических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте алгебры в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся и качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, алгебра развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Изучение алгебры, функций, вероятности и статистики существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

Изучение алгебры позволяет формировать умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическую оценку результатов. В процессе изучения алгебры школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса алгебры является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты математических умозаключений и принятые в алгебре правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно раскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым алгебра занимает одно из ведущих мест в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, алгебра вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся.

Общая характеристика курса. В курсе алгебры можно выделить следующие основные содержательные линии: арифметика; алгебра; функции; вероятность и статистика. Наряду с этим в содержание включены два дополнительных методологических раздела: логика и множества; математика в историческом развитии, что связано с реализацией целей общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся. Содержание каждого из этих разделов разворачивается в содержательно-методическую линию, пронизывающую все основные содержательные линии. При этом первая линия — «Логика и множества» — служит цели овладения учащимися некоторыми элементами универсального математического языка, вторая — «Математика в историческом развитии» — способствует созданию общекультурного, гуманитарного фона изучения курса.

Содержание линии «Арифметика» служит базой для дальнейшего изучения учащимися математики, способствует развитию их логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, а также приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни. Развитие понятия о числе в основной школе связано с рациональными и иррациональными числами, формированием первичных представлений о действительном числе.

Содержание линии «Алгебра» способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчёркивает значение математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

Развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, и овладение навыками дедуктивных рассуждений также являются задачами изучения алгебры. Преобразование символьных форм вносит специфический вклад в развитие воображения учащихся, их способностей к математическому творчеству. В основной школе материал группируется вокруг рациональных выражений.

Содержание раздела «Функции» нацелено на получение школьниками конкретных знаний о функции как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов. Изучение этого материала способствует развитию у учащихся умения использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), вносит вклад в формирование представлений о роли математики в развитии цивилизации и культуры.

Раздел «Вероятность и статистика» — обязательный компонент школьного образования, усиливающий его прикладное и практическое значение. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования у учащихся функциональной грамотности — умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчёт числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах.

При изучении статистики и вероятности обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план на изучение алгебры в 7—9 классах основной школы отводит 3 часа в неделю в течение каждого года обучения, всего 315 уроков на базовом уровне и не менее 4 ч в неделю на углублённом уровне.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

Для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом (выделено *курсивом*) уровнях выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах:

Элементы теории множеств и математической логики

• Оперировать[1] понятиями: множество, *характеристики множества,* элемент множества*, пустое, конечное и бесконечное множество*, подмножество, принадлежность, *включение, равенство множеств*;

• *изображать множества и отношение множеств с помощью кругов Эйлера*;

• *определять принадлежность элемента множеству, объединению и пересечению множеств*;

• задавать множество перечислениемего элементов, *словесного описания*;

• находить пересечение, объединение, подмножество в простейших ситуациях;

• оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, доказательство, *высказывание, истинность и ложность высказывания, отрицание высказываний, операции над высказываниями: и, или, не, условные высказывания (импликации)*;

• приводить примеры и контрпримеры для подтвержнения своих высказываний;

• *строить высказывания, отрицания высказываний.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графическое представление множеств для описания реальных процессов и явлений при решении задач из других учебных предметов;

• *строить цепочки умозаключений на основе использования правил логики*;

• *использовать множества, операции с множествами, их графическое представление для описания реальных процессов и явлений.*

Числа

• Оперировать понятиями: натуральное число, целое число, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанная дробь, рациональное число, арифметический квадратный корень;

[1] Здесь и далее на:
базовом уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия;
углублённом уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, уметь использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

• *оперировать понятиями: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, иррациональное число, квадратный корень, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел*;

• *понимать и объяснять смысл позиционной записи натурального числа*;

• использовать свойства чисел и правила действий при выполнении вычислений, *в том числе с использованием приёмов рациональных вычислений*;

• использовать признаки делимости на 2, 5, 3, 9, 10 при выполнении вычислений и решении несложных задач;

• выполнять округление рациональных чисел в соответствии с правилами и *с заданной точностью*;

• оценивать значение квадратного корня из положительного целого числа;

• распознавать рациональные и иррациональные числа и *сравнивать их*;

• *представлять рациональное число в виде десятичной дроби*;

• *упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби*;

• находить НОД и НОК чисел и *использовать их при решении задач.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать результаты вычислений при решении практических задач;

• выполнять сравнение чисел в реальных ситуациях;

• составлять числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

• *применять правила приближённых вычислений при решении практических задач и решении задач из других учебных предметов*;

• *выполнять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближённых вычислений*;

• *составлять и оценивать числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов*;

• *записывать и округлять числовые значения реальных величин с использованием разных систем измерения.*

Тождественные преобразования

• Оперировать понятиями: степень с натуральным показателем, степень с целым отрицательным показателем;

• выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;

• выполнять преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые; *действия с одночленами (сложение, вычитание, умножение), действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение)*;

• использовать формулы сокращённого умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений;

• *выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращённого умножения*;

• *выделять квадрат суммы и разности одночленов*;

• *раскладывать на множители квадратный трёхчлен*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми отрицательными показателями, переходить от записи в виде степени с целым отрицательным показателем к записи в виде дроби*;

• выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями, *а также сокращение дробей, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, сложение, умножение, деление алгебраических дробей, возведение алгебраической дроби в натуральную и целую отрицательную степень*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни*;

• *выделять квадрат суммы или разности двучлена в выражениях, содержащих квадратные корни*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих модуль.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• понимать смысл записи числа в стандартном виде;

• оперировать на базовом уровне понятием «стандартная запись числа».

• *выполнять преобразования и действия с числами, записанными в стандартном виде*;

• *выполнять преобразования алгебраических выражений при решении задач других учебных предметов.*

Уравнения и неравенства

• Оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, числовое неравенство, неравенство, корень уравнения, решение уравнения, решение неравенства, *равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств)*;

• проверять справедливость числовых равенств и неравенств;

• решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

• решать линейные уравнения и *уравнения, сводимые к линейным,* с помощью тождественных преобразований;

• проверять, является ли данное число решением уравнения (неравенства);

• решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения;

• *решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным, с помощью тождественных преобразований*;

• решать системы несложных линейных уравнений, неравенств;

• изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой;

• *решать дробно-линейные уравнения*;

• *решать простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

• *решать уравнения вида* $x^n = a$;

• *решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной*;

• *использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств*;

• *решать линейные уравнения и неравенства с параметрами*;

• *решать несложные квадратные уравнения с параметром*;

• *решать несложные системы линейных уравнений с параметрами*;

• *решать несложные уравнения в целых числах.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• составлять и решать линейные уравнения и *квадратные уравнения, уравнения, к ним сводящиеся, системы линейных уравнений, неравенств* при решении задач из других учебных предметов;

• *выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении линейных и квадратных уравнений и систем линейных уравнений и неравенств при решении задач других учебных предметов*;

• *выбирать соответствующие уравнения, неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи*;

• *уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи.*

Функции

• Оперировать понятиями: *функциональная зависимость,* функция, график функции, способы задания функции, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, нули функции, *промежутки знакопостоянства, монотонность функции, чётность/нечётность функции*;

• находить значение функции по заданному значению аргумента;

• находить значение аргумента по заданному значению функции в несложных ситуациях;

• определять положение точки по её координатам, координаты точки по её положению на координатной плоскости;

• по графику находить область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции;

• строить график линейной функции;

• проверять, является ли данный график графиком заданной функции (линейной, квадратичной, обратной пропорциональности);

• определять приближённые значения координат точки пересечения графиков функций;

• *строить графики линейной, квадратичной функций, обратной пропорциональности, функций вида:* $y = a + \frac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$;

• *на примере квадратичной функции, использовать преобразования графика функции* $y = f(x)$ *для построения графика функции* $y = af(kx + b) + c$;

• *составлять уравнения прямой по заданным условиям: проходящей через две точки с заданными координатами, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой*;

• *исследовать функцию по её графику*;

• *находить множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, монотонности квадратичной функции*;

• оперировать на базовом уровне понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия;

• решать простые задачи на прогрессии, в которых ответ может быть получен непосредственным подсчётом без применения формул;

• *решать задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию*.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графики реальных процессов и зависимостей для определения их свойств (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, области положительных и отрицательных значений и т. п.);

• использовать свойства линейной функции и её график при решении задач из других учебных предметов;

• *иллюстрировать с помощью графика реальную зависимость или процесс по их характеристикам*;

• *использовать свойства и график квадратичной функции при решении задач из других учебных предметов.*

Текстовые задачи

• Решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

• решать простые и *сложные задачи разных типов, а также задачи повышенной трудности*;

• строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи; *использовать разные краткие записи как модели текстов сложных задач для построения поисковой схемы и решения задач*;

• *различать модель текста и модель решения задачи, конструировать к одной модели решения несложной задачи разные модели текста задачи*;

• осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию; *знать и применять оба способа поиска решения задач (от требования к условию и от условия к требованию)*;

• решать несложные логические задачи методом рассуждений, *моделировать рассуждения при поиске решения задач с помощью граф-схемы*;

• *решать логические задачи разными способами, в том числе с двумя блоками и с тремя блоками данных с помощью таблиц*;

• составлять план решения задачи; выделять этапы решения задачи *и содержание каждого этапа*;

• *уметь выбирать оптимальный метод решения задачи и осознавать выбор метода, рассматривать различные методы, находить разные решения задачи, если возможно*;

• *анализировать затруднения при решении задач*;

• *выполнять различные преобразования предложенной задачи, конструировать новые задачи из данной, в том числе обратные*;

• *интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи*;

• *анализировать всевозможные ситуации взаимного расположения двух объектов и изменение их характеристик при совместном движении (скорость, время, расстояние) при решении задач на движение двух объектов как в одном, так и в противоположных направлениях*;

• знать различие скоростей объекта в стоячей воде, против течения и по течению реки; *исследовать всевозможные ситу-*

ации при решении задач на движение по реке, рассматривать разные системы отсчёта;

• решать задачи на нахождение части числа и числа по его части, *решать разнообразные задачи «на части»*;

• *решать и обосновывать своё решение задач (выделять математическую основу) на нахождение части числа и числа по его части на основе конкретного смысла дроби*;

• находить процент от числа, число по его проценту, процентное отношение двух чисел, процентное снижение или процентное повышение величины;

• *решать задачи на проценты, в том числе сложные проценты с обоснованием, используя разные способы*;

• решать, *осознавать и объяснять идентичность* задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними, *применять их при решении задач, конструировать собственные задачи указанных типов*;

• *владеть основными методами решения задач на смеси, сплавы, концентрации*;

• *решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение*;

• *решать несложные задачи по математической статистике*;

• *овладевать основными методами решения сюжетных задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов, геометрический, графический, применять их в новых по сравнению с изученными ситуациях.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• выдвигать гипотезы о возможных предельных значениях искомых величин в задаче (делать прикидку);

• *выделять при решении задач характеристики рассматриваемой в задаче ситуации, отличные от реальных (те, от которых абстрагировались), конструировать новые ситуации с учётом этих характеристик, в частности при решении задач на концентрации учитывать плотность вещества*;

• *решать и конструировать задачи на основе рассмотрения реальных ситуаций, в которых не требуется точный вычислительный результат.*

<u>Статистика и теория вероятностей</u>

• Иметь представление о статистических характеристиках, вероятности случайного события, комбинаторных задачах;

• решать простейшие комбинаторные задачи методом прямого и организованного перебора;

• представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков;

• читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;

• определять основные статистические характеристики числовых наборов;

• оценивать вероятность события в простейших случаях;

• иметь представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях;

• *оперировать понятиями: столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения выборки, размах выборки, дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость*;

• *извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках*;

• *составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных*;

• *оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля*;

• *применять правило произведения при решении комбинаторных задач*;

• *оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями*;

• *представлять информацию с помощью кругов Эйлера*;

• *решать задачи на вычисление вероятности с подсчётом количества вариантов с помощью комбинаторики.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать количество возможных вариантов методом перебора;

• иметь представление о роли практически достоверных и маловероятных событий;

• сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления;

• оценивать вероятность реальных событий и явлений в несложных ситуациях;

• извлекать, интерпретировать и *преобразовывать* информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;

• *определять статистические характеристики выборок по таблицам, диаграммам, графикам, выполнять сравнение в зависимости от цели решения задачи*;

• *оценивать вероятность реальных событий и явлений.*

История математики

• Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

• знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей;

• понимать роль математики в развитии России;

• *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*

Методы математики

• Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

• приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства;

• *используя изученные методы, проводить доказательство, выполнять опровержение*;

• *выбирать изученные методы и их комбинации для решения математических задач*;

• *использовать математические знания для описания закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства*;

• *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

(Содержание, выделенное *курсивом*,
изучается на углублённом уровне)

Числа

Рациональные числа. Множество рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел. Действия с рациональными числами. *Представление рационального числа десятичной дробью.*

Иррациональные числа. Понятие иррационального числа. Распознавание иррациональных чисел. Примеры доказательств в алгебре. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Применение в геометрии. *Сравнение иррациональных чисел. Множество действительных чисел.*

Тождественные преобразования

Числовые и буквенные выражения. Выражение с переменной. Значение выражения. Подстановка выражений вместо переменных.

Целые выражения. Степень с натуральным показателем и её свойства. Преобразования выражений, содержащих степени с натуральным показателем. Одночлен, многочлен. Действия с одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение). Формулы сокращённого умножения: разность квадратов, квадрат суммы и разности. Разложение многочлена на множители: вынесение общего множителя за скобки, *группировка, применение формул сокращённого умножения. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители.*

Дробно-рациональные выражения. Степень с целым показателем. Преобразование дробно-линейных выражений: сложение, умножение, деление. *Алгебраическая дробь. Допустимые значения переменных в дробно-рациональных выражениях. Сокращение алгебраических дробей. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю. Действия с алгебраическими дробями: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень. Преобразование выражений, содержащих знак модуля.*

Квадратные корни. Арифметический квадратный корень. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни: умножение, деление, вынесение множителя из-под знака корня, *внесение множителя под знак корня.*

Уравнения и неравенства

Равенства. Числовое равенство. Свойства числовых равенств. Равенство с переменной.

Уравнения. Понятие уравнения и корня уравнения. *Представление о равносильности уравнений. Область определения уравнения (область допустимых значений переменной).*

Линейное уравнение и его корни. Решение линейных уравнений. *Линейное уравнение с параметром. Количество корней линейного уравнения. Решение линейных уравнений с параметром.*

Квадратное уравнение и его корни. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения. Дискриминант квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения. *Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета.* Решение квадратных уравнений: использование формулы для нахождения корней, *графический метод решения, разложение на множители, подбор корней с использованием теоремы Виета. Количество корней квадратного уравнения в зависимости от его дискриминанта. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводимые к линейным и квадратным. Квадратные уравнения с параметром.*

Дробно-рациональные уравнения. Решение простейших дробно-линейных уравнений. *Решение дробно-рациональных уравнений. Методы решения уравнений: методы равносильных преобразований, метод замены переменной, графический метод. Использование свойств функций при решении уравнений. Простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. *Уравнения вида* $x^n = a$. *Уравнения в целых числах.*

Системы уравнений. Уравнение с двумя переменными. Линейное уравнение с двумя переменными. *Прямая как графическая интерпретация линейного уравнения с двумя переменными.*

Понятие системы уравнений. Решение системы уравнений. Методы решения систем линейных уравнений с двумя переменными: *графический метод, метод сложения,* метод подстановки. *Системы линейных уравнений с параметром.*

Неравенства. Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Проверка справедливости неравенств при заданных значениях переменных. Неравенство с переменной. Строгие и нестрогие неравенства. *Область определения неравенства (область допустимых значений переменной).*

Решение линейных неравенств. *Квадратное неравенство и его решения. Решение квадратных неравенств: использование свойств и графика квадратичной функции, метод интервалов. Запись решения квадратного неравенства. Решение целых и дробно-рациональных неравенств методом интервалов.*

Системы неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Решение систем неравенств с одной переменной: линейных, *квадратных.* Изображение решения системы неравенств на числовой прямой. Запись решения системы неравенств.

Функции

Понятие функции. Декартовы координаты на плоскости. Формирование представлений о метапредметном понятии «координаты». Способы задания функций: аналитический, графический, табличный. График функции. Примеры функций, получаемых в процессе исследования различных реальных процессов и решения задач. Значение функции в точке. Свойства функций: область определения, множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, *чётность/нечётность,* промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения. Исследование функции по её графику. *Представление об асимптотах. Непрерывность функции. Кусочно заданные функции.*

Линейная функция. Свойства и график линейной функции. Угловой коэффициент прямой. Расположение графика линейной функции в зависимости от её углового коэффициента и свободного члена. *Нахождение коэффициентов линейной функции по заданным условиям: прохождение прямой через две точки с заданными координатами, прохождение прямой через данную точку и параллельно данной прямой.*

Квадратичная функция. Свойства и график квадратичной функции (парабола). *Построение графика квадратичной функции по точкам.* Нахождение нулей квадратичной функции, *множества значений, промежутков знакопостоянства, промежутков монотонности.*

Обратная пропорциональность. Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$. Гипербола.

Графики функций. *Преобразование графика функции $y = f(x)$ для построения графиков функций вида $y = af(kx + b) + c$. Графики функций $y = a + \dfrac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$.*

Последовательности и прогрессии. Числовая последовательность. Примеры числовых последовательностей. Бесконечные последовательности. Арифметическая прогрессия и её свойства. Геометрическая прогрессия. *Формула общего члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сходящаяся геометрическая прогрессия.*

Решение текстовых задач

Задачи на все арифметические действия. Решение текстовых задач арифметическим способом. Использование таблиц, схем, чертежей, других средств представления данных при решении задачи.

Задачи на движение, работу и покупки. Анализ возможных ситуаций взаимного расположения объектов при их движении, соотношения объёмов выполняемых работ при совместной работе.

Задачи на части, доли, проценты. Решение задач на нахождение части числа и числа по его части. Решение задач на проценты и доли. Применение пропорций при решении задач.

Логические задачи. Решение логических задач. *Решение логических задач с помощью графов, таблиц.*

Основные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов. *Первичные представления о других методах решения задач (геометрические и графические методы).*

Статистика и теория вероятностей

Статистика. Табличное и графическое представление данных, столбчатые и круговые диаграммы, графики, применение диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечение информации из таблиц, диаграмм и графиков. Описательные статистические показатели числовых наборов: среднее арифметическое, *медиана,* наибольшее и наименьшее значения. Меры рассеивания: размах, *дисперсия и стандартное отклонение.* Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. *Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах.*

Случайные события. Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события(исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков. *Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева. Независимые события. Умножение вероятностей независимых событий. Последовательные независимые испытания.* Представление о независимых событиях в жизни.

Элементы комбинаторики. *Правило умножения, перестановки, факториал числа. Сочетания и число сочетаний. Формула числа сочетаний. Треугольник Паскаля. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий. Вычисление вероятностей в опытах с применением комбинаторных формул. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.*

Случайные величины. *Знакомство со случайными величинами на примерах конечных дискретных случайных величин. Распределение вероятностей. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Понятие о законе больших чисел. Измерение вероятностей. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.*

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическому комплекту по алгебре, выпускаемому издательством «Просвещение», не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по алгебре разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, на использование современных технологий.

Тематическое планирование представлено в двух вариантах.

Первый вариант составлен из расчёта часов, указанных в проекте Базисного учебного (образовательного) плана (БУП) образовательных учреждений общего образования (не менее 3 часов в неделю, 102 часа в год). При составлении рабочей программы образовательное учреждение может увеличить указанное в проекте БУП минимальное учебное время за счёт его вариативного компонента.

Второй вариант примерного тематического планирования предназначен для классов, нацеленных на повышенный уровень математической подготовки учащихся. В этом случае в основное программное содержание включаются дополнительные вопросы, способствующие развитию математического кругозора, освоению более продвинутого математического аппарата, математических способностей. Расширение содержания математического образования в этом случае даёт возможность существенно обогатить круг решаемых математических задач. При работе по второму варианту примерного тематического планирования на изучение алгебры рекомендуется отводить не менее 4 часов в неделю. Учебные часы, приведённые в примерном тематическом планировании, даны в минимальном объёме (из расчёта 4 часов в неделю, 136 часов в год). Дополнительные вопросы в примерном тематическом планировании даны в квадратных скобках.

Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9»

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
	7 класс			
Глава 1. Дроби и проценты		**11**	**16**	Сравнивать и упорядочивать рациональные числа. Выполнять вычисления с рациональными числами, вычислять значения степеней с натуральными показателями. Выполнять прикидку и оценку в ходе вычислений. Использовать эквивалентные представления дробных чисел при их сравнении и в вычислениях. Проводить несложные исследования, связанные со свойствами дробных чисел, опираясь на числовые эксперименты (в том числе с использованием калькулятора, компьютера). Осуществлять поиск информации (в СМИ), содержащей данные, выраженные в процентах, интерпретировать эти данные. Решать задачи на проценты и дроби (в том числе задачи из реальной практики, используя при необходимости калькулятор). Приводить примеры числовых данных (цена, рост, время на дорогу), находить среднее арифметическое, моду и размах числовых наборов, в том числе
1.1	Сравнение дробей	4	6	
1.2	Вычисления с рациональными числами			
1.3	Степень с натуральным показателем			
1.4	Задачи на проценты	2	4	
1.5	Статистические характеристики	3	4	
	Обзор и контроль	2	2	

				извлекая необходимую информацию из таблиц и диаграмм. Приводить содержательные примеры использования среднего арифметического, моды и размаха для описания данных (демографические и социологические данные, спортивные показатели и др.)
Глава 2. Прямая и обратная пропорциональность		**8**	**10**	Моделировать несложные зависимости с помощью формул; выполнять вычисления по формулам, выражать из формулы одни величины через другие. Распознавать прямую и обратную пропорциональные зависимости. Использовать свойства прямой и обратной пропорциональности для выполнения практических расчётов. Решать текстовые задачи на прямую и обратную пропорциональные зависимости, на пропорциональное деление (в том числе с контекстом из смежных дисциплин, из реальной жизни). Анализировать и осмысливать текст задачи, моделировать условие с помощью схем, строить логическую цепочку рассуждений; критически оценивать полученный ответ, осуществлять самоконтроль, проверяя ответ на соответствие условию
2.1	Зависимости и формулы	3	4	
2.2	Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность			
2.3	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций	3	4	
2.4	Пропорциональное деление			
	Обзор и контроль	2	2	
Глава 3. Введение в алгебру		**9**	**11**	Применять язык алгебры при выполнении элементарных знаково-символических действий: использовать буквы для обозначения чисел, для записи общих утверждений; моделировать буквенными выражениями условия, описанные словесно, рисунком или чертежом; преобразовывать алгебраические суммы и произведения (выполнять
3.1	Буквенная запись свойств действий над числами	3	4	
3.2	Преобразование буквенных выражений			

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
3.3 3.4	Раскрытие скобок Приведение подобных слагаемых Обзор и контроль	4 2	5 2	приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, упрощение произведений). Выполнять числовые подстановки в буквенное выражение, вычислять числовое значение буквенного выражения
Глава 4. Уравнения		**10**	**13**	Переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения. Проводить доказательные рассуждения о корнях уравнения с опорой на определение корня. Объяснять и формулировать правила преобразования уравнений. Конструировать алгоритм решения линейных уравнений, распознавать линейные уравнения, решать линейные уравнения, а также уравнения, сводящиеся к ним, с помощью простейших преобразований. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: составлять уравнение по условию задачи, решать составленное уравнение. Проводить рассуждения, основанные на интерпретации условия поставленной задачи, для поиска целых корней некоторых несложных нелинейных уравнений
4.1 4.2 4.3 4.4	Алгебраический способ решения задач Корни уравнения Решение уравнений Решение задач с помощью уравнений Обзор и контроль	3 5 2	4 7 2	

Глава 5. Координаты и графики		**10**	**14**	Изображать числа точками координатной прямой, пары чисел точками координатной плоскости. Строить на координатной плоскости геометрические изображения множеств, заданных алгебраически, описывать множества точек координатной плоскости (области, ограниченные горизонтальными и вертикальными прямыми и пр.) алгебраическими соотношениями. Строить графики простейших зависимостей, заданных алгебраическими соотношениями, проводить несложные исследования особенностей этих графиков. Моделировать реальные зависимости графиками. Читать графики реальных зависимостей
5.1	Множества точек на координатной прямой	4	6	
5.2	Расстояние между точками координатной прямой			
5.3	Множества точек на координатной плоскости			
5.4	Графики	4	6	
5.5	Ещё несколько важных графиков			
5.6	Графики вокруг нас			
	Обзор и контроль	2	2	
Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем		**10**	**12**	Формулировать, записывать в символической форме и обосновывать свойства степени с натуральным показателем, применять свойства степени для преобразования выражений и вычислений. Выполнять перебор всех возможных вариантов для пересчёта объектов или комбинаций. Применять правило комбинаторного умножения для решения задач на нахождение числа объектов или комбинаций (диагонали многоугольника, рукопожатия, число кодов, шифров, паролей и т. п.). Распознавать задачи на определение числа перестановок и выполнять соответствующие вычисления
6.1	Произведение и частное степеней	4	5	
6.2	Степень степени, произведения и дроби			
6.3	Решение комбинаторных задач	4	5	
6.4	Перестановки			
	Обзор и контроль	2	2	

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
Глава 7. Многочлены		**16**	**20**	Выполнять действия с многочленами. Доказывать формулы сокращённого умножения (для двучленов), применять их в преобразованиях выражений и вычислениях. Проводить исследование для конструирования и последующего доказательства новых формул сокращённого умножения. Решать уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: моделировать условие задачи рисунком, чертежом; переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения; решать составленное уравнение
7.1	Одночлены и многочлены	5	7	
7.2	Сложение и вычитание многочленов			
7.3	Умножение одночлена на многочлен			
7.4	Умножение многочлена на многочлен	8	10	
7.5	Формулы квадрата суммы и квадрата разности			
7.6	Решение задач с помощью уравнений			
	Обзор и контроль	3	3	
Глава 8. Разложение многочленов на множители		**16**	**21**	Выполнять разложение многочленов на множители, применяя различные способы; анализировать многочлен и распознавать возможность применения того или иного приёма разложения его на множители. Применять различные формы самоконтроля при выполнении преобразований. Применять разложение на множители к решению уравнений
8.1	Вынесение общего множителя за скобки	5	7	
8.2	Способ группировки			
8.3	Формула разности квадратов	3	4	
8.4	Формулы разности и суммы кубов			

8.5	Разложение на множители с применением нескольких способов	5	7	
8.6	Решение уравнений с помощью разложения на множители			
	Обзор и контроль	3	3	
Глава 9. Частота и вероятность		**7**	**10**	Проводить эксперименты со случайными исходами, в том числе с помощью компьютерного моделирования, интерпретировать их результаты. Вычислять частоту случайного события; оценивать вероятность с помощью частоты, полученной опытным путём; прогнозировать частоту наступления события по его вероятности. Приводить примеры случайных событий, в частности достоверных и невозможных событий, маловероятных событий. Приводить примеры равновероятных событий
9.1	Случайные события	2	3	
9.2	Частота случайного события	4	6	
9.3	Вероятность случайного события			
	Обзор и контроль	1	1	
Обобщение и систематизация знаний. Итоговая контрольная работа		**5**	**9**	
8 класс				
Глава 1. Алгебраические дроби		**20**	**27**	Конструировать алгебраические выражения. Находить область определения алгебраической дроби; выполнять числовые подстановки и вычислять значение дроби, в том числе с помощью калькулятора.
1.1	Что такое алгебраическая дробь	4	7	

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
1.2	Основное свойство дроби			Формулировать основное свойство алгебраической дроби и применять его для преобразования дробей. Выполнять действия с алгебраическими дробями. Применять преобразования выражений для решения задач. Выражать переменные из формул (физических, геометрических, описывающих бытовые ситуации). Проводить исследования, выявлять закономерности.
1.3	Сложение и вычитание алгебраических дробей	7	9	
1.4	Умножение и деление алгебраических дробей			
1.5	Преобразование выражений, содержащих алгебраические дроби			
1.6	Степень с целым показателем	5	6	Формулировать определение степени с целым показателем.
1.7	Свойства степени с целым показателем			Формулировать, записывать в символической форме и иллюстрировать примерами свойства степени с целым показателем; применять свойства степени для преобразования выражений и вычислений. Использовать запись чисел в стандартном виде для выражения размеров объектов, длительности процессов в окружающем мире. Сравнивать числа и величины, записанные с использованием степени 10. Выполнять вычисления с реальными данными. Выполнять прикидку и оценку результатов вычислений.
1.8	Решение уравнений и задач	2	3	Решать уравнения с дробными коэффициентами, решать текстовые задачи алгебраическим методом
	Обзор и контроль	2	2	

Глава 2. Квадратные корни		**15**	**22**	Формулировать определения квадратного корня из числа. Применять график функции $y=x^2$ для нахождения корней квадратных уравнений, используя при необходимости калькулятор; проводить оценку квадратных корней. Строить график функции $y=\sqrt{x}$, исследовать по графику её свойства. Доказывать свойства арифметических квадратных корней; применять их к преобразованию выражений. Вычислять значения выражений, содержащих квадратные корни; выполнять знаково-символические действия с использованием обозначений квадратного и кубического корня. Исследовать уравнение $x^2=a$, находить точные и приближённые корни при $a>0$. Формулировать определение корня третьей степени; находить значения кубических корней, при необходимости используя калькулятор
2.1	Задача о нахождении стороны квадрата	4	6	
2.2	Иррациональные числа			
2.3	Теорема Пифагора			
2.4	Квадратный корень (алгебраический подход)	3	5	
2.5	График зависимости $y=\sqrt{x}$			
2.6	Свойства квадратных корней	5	7	
2.7	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни			
2.8	Кубический корень	1	2	
	Обзор и контроль	2	2	
Глава 3. Квадратные уравнения		**19**	**24**	Распознавать квадратные уравнения, классифицировать их. Выводить формулу корней квадратного уравнения. Решать квадратные уравнения — полные и неполные. Проводить простейшие исследования квадратных уравнений. Решать уравнения, сводящиеся к квадратным, путём преобразований, а также с помощью замены переменной. Наблюдать и анализировать связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Фор-
3.1	Какие уравнения называют квадратными	9	11	
3.2	Формула корней квадратного уравнения			
3.3	Вторая формула корней квадратного уравнения			
3.4	Решение задач			
3.5	Неполные квадратные уравнения	3	4	

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
3.6 3.7	Теорема Виета Разложение квадратного трёхчлена на множители Обзор и контроль	5 2	7 2	мулировать и доказывать теорему Виета, а также обратную теорему, применять эти теоремы для решения разнообразных задач. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения; решать составленное уравнение; интерпретировать результат. Распознавать квадратный трёхчлен, выяснять возможность разложения на множители, представлять квадратный трёхчлен в виде произведения линейных множителей. Применять различные приёмы самоконтроля при выполнении преобразований. Проводить исследования квадратных уравнений с буквенными коэффициентами, выявлять закономерности
Глава 4. Системы уравнений		**20**	**24**	Определять, является ли пара чисел решением уравнения с двумя переменными; приводить примеры решений уравнений с двумя переменными. Решать задачи, алгебраической моделью которых является уравнение с двумя переменными; находить целые решения путём перебора.
4.1 4.2	Линейное уравнение с двумя переменными График линейного уравнения с двумя переменными	7	8	

4.3	Уравнение прямой вида $y = kx + l$			Распознавать линейные уравнения с двумя переменными; строить прямые — графики линейных уравнений; извлекать из уравнения вида $y = kx + l$ информацию о положении прямой в координатной плоскости. Распознавать параллельные и пересекающиеся прямые по их уравнениям; конструировать уравнения прямых, параллельных данной прямой. Использовать приёмы самоконтроля при построении графиков линейных уравнений. Решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными; использовать графические представления для исследования систем линейных уравнений; решать простейшие системы, в которых одно из уравнений не является линейным. Применять алгебраический аппарат для решения задач на координатной плоскости. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления системы уравнений; решать составленную систему уравнений; интерпретировать результат
4.4	Системы уравнений. Решение систем способом сложения	9	11	
4.5	Решение систем уравнений способом подстановки			
4.6	Решение задач с помощью систем уравнений			
4.7	Задачи на координатной плоскости	2	3	
	Обзор и контроль	2	2	
Глава 5. Функции		**14**	**19**	Вычислять значения функций, заданных формулами (при необходимости использовать калькулятор); составлять таблицы значений функций. Строить по точкам графики функций. Описывать свойства функции на основе её графического представления.
5.1	Чтение графиков	3	5	
5.2	Что такое функция			
5.3	График функции	4	5	
5.4	Свойства функции			

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
5.5	Линейная функция	5	7	Моделировать реальные зависимости формулами и графиками. Читать графики реальных зависимостей. Использовать функциональную символику для записи разнообразных фактов, связанных с рассматриваемыми функциями, обогащая опыт выполнения знаково-символических действий. Строить речевые конструкции с использованием функциональной терминологии. Использовать компьютерные программы для построения графиков функций, для исследования положения на координатной плоскости графиков функций в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу. Распознавать виды изучаемых функций. Показывать схематически расположение на координатной плоскости графиков функций вида $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулы. Строить графики изучаемых функций; описывать их свойства
5.6	Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график			
	Обзор и контроль	2	2	

Глава 6. Вероятность и статистика		**9**	**11**	Характеризовать числовые ряды с помощью различных средних. Находить вероятности событий при равновозможных исходах; решать задачи на вычисление вероятностей с применением комбинаторики. Находить геометрические вероятности
6.1	Статистические характеристики	2	3	
6.2	Классическое определение вероятности	5	6	
6.3	Сложные эксперименты			
6.4	Геометрические вероятности			
	Обзор и контроль	2	2	
Обобщение и систематизация знаний. Итоговая контрольная работа		**5**	**9**	
9 класс				
Глава 1. Неравенства		**18**	**23**	Приводить примеры иррациональных чисел; распознавать рациональные и иррациональные числа; изображать числа точками координатной прямой. Находить десятичные приближения рациональных и иррациональных чисел; сравнивать и упорядочивать действительные числа. Описывать множество действительных чисел. Использовать в письменной математической речи обозначения и графические изображения числовых множеств, теоретико-множественную символику. Использовать разные формы записи приближённых значений; делать выводы о точности приближения по записи приближённого значения.
1.1	Действительные числа	2	3	
1.2	Общие свойства неравенств	10	12	
1.3	Решение линейных неравенств			
1.4	Решение систем линейных неравенств			
1.5	Доказательство неравенств	2	3	
1.6	Что означают слова «с точностью до...»	2	3	
	Обзор и контроль	2	2	

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
				Формулировать свойства числовых неравенств, иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически; применять свойства неравенств в ходе решения задач. Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств с одной переменной. Доказывать неравенства, применяя приёмы, основанные на определении отношений «больше» и «меньше», свойствах неравенств, некоторых классических неравенствах
Глава 2. Квадратичная функция		**19**	**24**	Распознавать квадратичную функцию, приводить примеры квадратичных зависимостей из реальной жизни, физики, геометрии. Выявлять путём наблюдений и обобщать особенности графика квадратичной функции. Строить и изображать схематически графики квадратичных функций; выявлять свойства квадратичных функций по их графикам. Строить более сложные графики на основе графиков всех изученных функций. Проводить разнообразные исследования, связанные с квадратичной функцией и её графиком.
2.1	Какую функцию называют квадратичной	3	4	
2.2	График и свойства функции $y=ax^2$	6	8	
2.3	Сдвиг графика функции $y=ax^2$ вдоль осей координат			
2.4	График функции $y=ax^2+bx+c$	8	10	
2.5	Квадратные неравенства			
2.6	Метод интервалов			
	Обзор и контроль	2	2	

				Выполнять знаково-символические действия с использованием функциональной символики; строить речевые конструкции с использованием функциональной терминологии. Решать квадратные неравенства, а также неравенства, сводящиеся к ним, путём несложных преобразований; решать системы неравенств, в которых одно неравенство или оба являются квадратными. Применять аппарат неравенств при решении различных задач
Глава 3. Уравнения и системы уравнений		**26**	**34**	Распознавать рациональные и иррациональные выражения, классифицировать рациональные выражения. Находить область определения рационального выражения; выполнять числовые и буквенные подстановки. Преобразовывать целые и дробные выражения; доказывать тождества. Давать графическую интерпретацию функциональных свойств выражений с одной переменной. Распознавать целые и дробные уравнения. Решать целые и дробные выражения, применяя различные приёмы. Строить графики уравнений с двумя переменными. Конструировать эквивалентные речевые высказывания с использованием алгебраического и геометрического языков. Решать системы двух уравнений с двумя переменными, используя широкий набор приёмов. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки
3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7	Рациональные выражения Целые уравнения Дробные уравнения Решение задач Системы уравнений с двумя переменными Решение задач Графическое исследование уравнения Обзор и контроль	4 10 7 3 2	5 13 9 5 2	

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
		I	II	
				условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения или системы уравнений; решать составленное уравнение (систему уравнений); интерпретировать результат. Использовать функционально-графические представления для решения и исследования уравнений и систем
Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**18**	**24**	Применять индексные обозначения, строить речевые высказывания с использованием терминологии, связанной с понятием последовательности. Вычислять члены последовательностей, заданных формулой n-го члена или рекуррентной формулой. Устанавливать закономерность в построении последовательности, если выписаны первые несколько её членов. Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости. Распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания. Выводить на основе доказательных рассуждений формулы общего члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий; решать задачи с использованием этих формул.
4.1	Числовые последовательности	2	3	
4.2	Арифметическая прогрессия	5	7	
4.3	Сумма первых n членов арифметической прогрессии			
4.4	Геометрическая прогрессия	5	7	
4.5	Сумма первых n членов геометрической прогрессии			
4.6	Простые и сложные проценты	4	5	
	Обзор и контроль	2	2	

				Рассматривать примеры из реальной жизни, иллюстрирующие изменение в арифметической прогрессии, в геометрической прогрессии; изображать соответствующие зависимости графически. Решать задачи на сложные проценты, в том числе задачи из реальной практики (с использованием калькулятора)
Глава 5. Статистика и вероятность		**9**	**13**	Осуществлять поиск статистической информации, рассматривать реальную статистическую информацию, организовывать и анализировать её (ранжировать данные, строить интервальные ряды, строить диаграммы, полигоны частот, гистограммы; вычислять различные средние, а также характеристики разброса). Прогнозировать частоту повторения события на основе имеющихся статистических данных
5.1	Выборочные исследования	2	3	
5.2	Интервальный ряд. Гистограмма	2	3	
5.3	Характеристика разброса	2	3	
5.4	Статистическое оценивание и прогноз	1	2	
	Обзор и контроль	—	—	
Обобщение и систематизация знаний. Итоговая контрольная работа		**12**	**18**	